ШАД 2022
альтернативный трек

A. Система

Найдите, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x + y + 5z = 1 \\ 2x + 3y + 13z = 4 \\ x + 4y + 15z = 2 \\ 6y + 21z = a \end{cases}$$

имеет решение.

Решение.

- Левая часть последней строки является суммой левых частей 1-й и 3-й за вычетом второй, умноженной на 3. Поэтому, если $a \neq -3$, система несовместна.
- Решим систему из первых трёх уравнений исходной системы:

$$\begin{cases} x + y + 5z = 1 \\ 2x + 3y + 13z = 4 \\ x + 4y + 15z = 2 \\ 6y + 21z = a \end{cases}$$

- Введём обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \\ 1 & 4 & 15 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  Тогда систему можно переписать в виде:

$$Ax = b$$

- Так как $\det(A) = 1$, система имеет единственное решение.
  Напомним, что если определитель матрицы не равен 0, то матрица обратима и уравнение вида $Ax = b$ имеет единственное решение, так как мы можем умножить обе его части слева на A^{-1}.

Ответ: $a = -3$

B. Упрощай

Раскройте скобки в матричном выражении:

$$\left(A - B^T\right)^2 \left(A^T + B\right)^2$$

Решение.

При решение задач с матрицами, важно помнить, что

$$AB \neq BA$$

в общем случае.
Более того если AB существует, это ещё не значит, что существует BA. Это верно лишь для квадратных матриц.

- $$\left[A - B^T\right]^2 = A^2 - B^T A - AB^T + B^{2T}$$

- $$\left[A^T + B\right]^2 = A^{2T} + BA^T + A^T B + B^2$$

- $$\left(A - B^T\right)^2 \left(A^T + B\right)^2 = \left[A^2 - B^T A - AB^T + B^{2T}\right]\left[A^{2T} + BA^T + A^T B + B^2\right] =$$

  - $$A^2 A^{2T} - B^T A A^{2T} - AB^T A^{2T} + B^{2T} A^{2T} +$$

  - $$A^2 BA^T - B^T ABA^T - AB^T BA^T + B^{2T} BA^T +$$

  - $$A^2 A^T B - B^T A A^T B - AB^T A^T B + B^{2T} A^T B +$$

  - $$A^2 B^2 - B^T AB^2 - AB^T B^2 + B^{2T} B^2.$$

C. Чеканные монеты

Подбрасываются 16 симметричных монет (вероятности орла и решки совпадают).
Найдите вероятность того, что:

1. На всех монетах выпадут орлы.
2. На 6 монетах выпадут орлы, а на 10 — решки.
3. Орлы выпадут хотя бы на двух монетах.

Решение.

К этой задаче можно подойти следующим образом: подбрасывания 16 монет можно закодировать словами длины 16 в алфавите {O, P}. Вероятность каждого слова равна $\frac{1}{2^16}$.

- 1. $\mathbb{P}(«16 \text{ орлов}») = \mathbb{P}(O, O, \ldots, O) = \frac{1}{2^{16}}$
- 2. $\mathbb{P}(«6 \text{ орлов и } 10 \text{ решек}») = C_{16}^6 \mathbb{P}(O, O, O, O, O, O, P \ldots, P) = C_{16}^6 \frac{1}{2^{16}}$, так как существует ровно C_{16}^6 слов из 16 букв, содержащих 6 букв O и 10 P.
- 3. $\mathbb{P}(«\text{число орлов} \geq 2») = 1 - \mathbb{P}(«\text{число орлов} < 2») = 1 - \mathbb{P}(«\text{число орлов} = 0») - \mathbb{P}(«\text{число орлов} = 1») = 1 - \frac{1}{2^{16}} - C_{16}^1 \frac{1}{2^{16}}$.

Ответ:

- 1. $\frac{1}{2^{16}}$
- 2. $C_{16}^6 \frac{1}{2^{16}}$
- 3. $1 - \frac{17}{2^{16}}$

D. Кратчайший отрезок

Даны k массивов $A_1, \ldots, A_k$ целых чисел, отсортированных по неубыванию. Предложите алгоритм, находящий кратчайший отрезок действительной прямой, который содержал бы хотя бы один элемент каждого из массивов $A_1, \ldots, A_k$.

Если даны два отрезка $[a, b]$ и $[c, d]$, то мы будем говорить, что $[a, b]$ короче $[c, d]$, если $b - a < c - d$ или $b - a = c - d$ и $a < c$.

Отрезок длины 0 (концы которого совпадают) является валидным.

Ваш алгоритм должен работать за $O(N \log k)$ операций, где N — суммарное количество элементов в массивах $A_1, \ldots, A_k$.

Обязательно обоснуйте работоспособность вашего алгоритма. Оцените его сложность и объём необходимой дополнительной памяти. Мы будем признательны, если описание алгоритма будет дано не листингом кода, а просто текстом, возможно, с привлечением псевдокода.

Решение.

Будем итерироваться параллельно по всем массивам, поддерживая на каждом шагу набор next[1:k] указателей на очередной элемент каждого из массивов. Нетрудно видеть, что отрезок [min(next), max(next)] содержит по одному элементу каждого из массивов. На очередном шагу мы выбираем в next следующий за min(next) элемент соответствующего массива. Чтобы быстро искать минимум, воспользуемся кучей. Если длина очередного [min(next), max(next)] оказалась меньше текущей минимальной, обновляем кандидата в кратчайшие отрезки.

Сложность алгоритма — O(N logk), где N — суммарное число элементов во всех массивах (сколько раз мы двигали указатели), а logk — сложность пропихивания элемента в кучу.

Дополнительной памяти требуется O(k) — на массив next и на кучу.

E. Производная

Найдите производную сложной функции

$$f(x) = e^{\sin(g(ln(x)))}$$

в точке $x = e$, если известно, что $g(1) = 5$, а $g'(1) = 3$.

Решение.

Применим правило дифференцирования сложной функции:

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=e} = \left.\frac{dln(x)}{dx}\right|_{x=e} \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=ln(e)} \left.\frac{dsin(x)}{dx}\right|_{x=g(ln(e))} \left.\frac{de^x}{dx}\right|_{x=\sin(g(ln(e)))} =$$

$$\frac{1}{e}g'(ln(e))\cos(g(ln(e)))e^{\sin(g(ln(e)))} =$$

$$\frac{3}{e}\cos(5)e^{\sin(5)}$$

Ответ: $\frac{3}{e}\cos(5)e^{\sin(5)}$

F. Тир

Два биатлониста стреляют по мишени. Первый, менее опытный, попадает с вероятностью $\frac{1}{3}$. Второй – с вероятностью $\frac{5}{6}$.

Найдите минимально возможную вероятность того, что оба попадут по мишени.

События «первый стрелок попал в мишень»(A) и «второй стрелок попал в мишень»(B) не обязаны быть независимыми.

Решение.

Задача на вероятность пересечения / объединения событий:

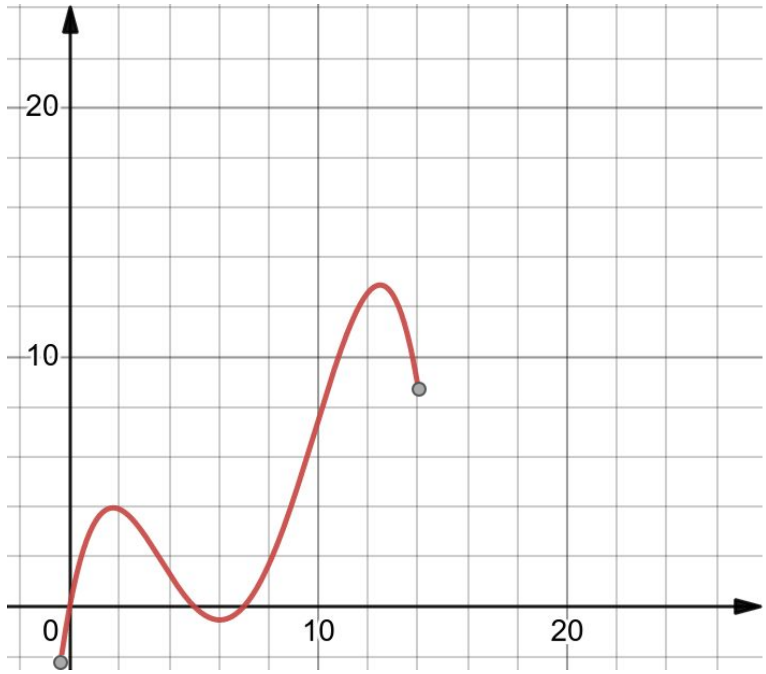
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

- В нашей задаче:
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{7}{6} - \mathbb{P}(A \cap B)$$
- Так как максимально возможное значение $\mathbb{P}(A \cap B)$ равно 1, ответ: $\frac{1}{6}$

Ответ: $\frac{1}{6}$

G. График производной

Функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\frac{1}{3}, 14]$. График её производной имеет следующий вид:



Найдите точки, в которых находятся локальные максимумы функции $f(x)$ на отрезке $[-\frac{1}{3}, 14]$.

Напомним определения локального максимума:

Определение.

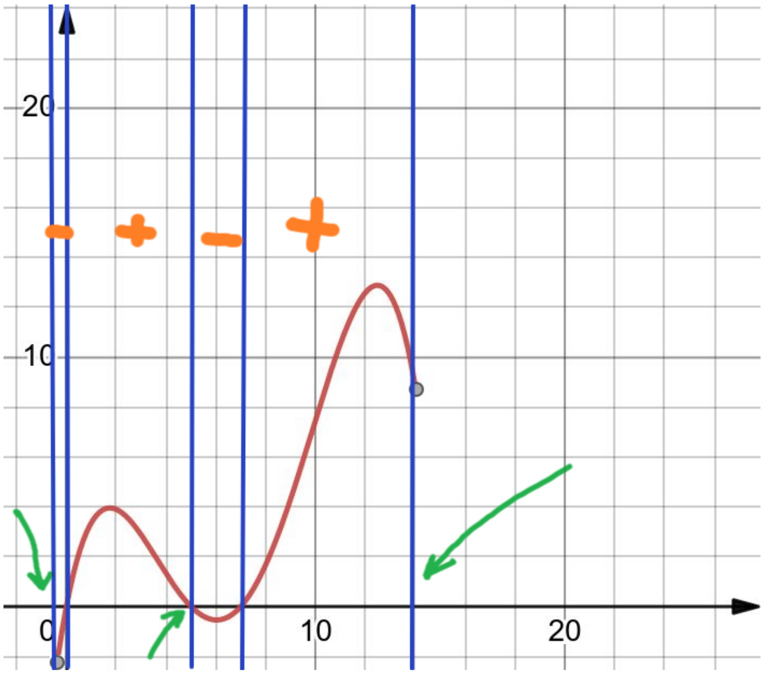
Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$ и задана функция $f: M \to \mathbb{R}$. Тогда $x_0 \in M$ — **точка локального максимума** f, если

$$\exists \varepsilon > 0 \ : \ \forall x \in M \quad [|x - x_0| < \varepsilon \Longrightarrow f(x_0) \geq f(x)]$$

Проще говоря: существует небольшая окрестность точки x_0 (радиуса ε), в которой значение функции в x_0 не меньше значений функции в точках данной окрестности.

Решение.

Легко заметить, что на концах отрезка находятся локальные максимумы. Это верно, так как существуют проколотые правая полуокрестность точки $-\frac{1}{3}$ и левая полуокрестность точки 14, такие, что в первой производная отрицательна, а во второй положительна. Можно явно указать такие полуокрестности: к примеру, радиусов $\frac{1}{9}$ и 5 соответственно.
Также локальный максимум находится в точке, слева от которой производная отрицательна, а справа положительна (строго можно сказать, что существует окрестность данной точки, в которой это выполнено), так как до неё функция возрастает, а после убывает.
Можно обойтись без всего этого формализма и просто посмотреть на знаки производной: там где она отрицательна, функция убывает, а там где положительна, функция возрастает.



Ответ: Тут 3 точки локального максимума: на концах отрезка и центральная точка, где график пересекает ось OX.

H. Орки и эльфы

В темноте, за круглым столом, собрались орки и эльфы – всего 12 их было. Орки всегда лгут, а эльфы говорят лишь правду. Каждый из них проворчал: «Все кроме меня и моих соседей – орки». Сколько эльфов за столом сидело? **Каждое существо не сообщает никакой информации про себя и соседей. Только про остальных!**

Решение.

Это классическая задачка про рыцарей и лжецов:

По кругу сидят рыцари и лжецы – всего 12 человек. Каждый из них сделал заявление: «Все кроме, быть может, меня и моих соседей – лжецы». Сколько рыцарей сидит за столом, если известно, что лжецы всегда врут, а рыцари всегда говорят правду?

Все не могут быть лжецами – тогда все заявления были бы истинными. Значит, есть хотя бы один рыцарь. Все, кроме, быть может, его двух соседей – лжецы. Оба соседа не могут быть лжецами – тогда они сказали бы правду; оба не могут быть рыцарями – тогда бы они солгали, т.к. они соседи рыцаря. Единственная оставшаяся возможность – один сосед — лжец, другой – рыцарь (то есть два рыцаря рядом, остальные — лжецы) удовлетворяет условиям задачи.

Ответ: 2 рыцаря.