ШАД 2022
основной трек

A. Инвариант

Пусть $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ — пространство матриц размера $n \times n$ над полем действительных чисел, а

$$F : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

линейный оператор, такой, что $\det F(A) = \det A$, для любой $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
Верно ли, что оператор F обратим?

Решение.

Вопрос можно переформулировать следующим образом: Верно ли, что все операторы из заданного класса обратимы?

К задачам с такой формулировкой обычно подходит метод доказательства от противного: мы пытаемся построить объект, который удовлетворяет сформулированным в задаче свойствам, но не обладает требуемым (по сути мы пытаемся построить контрпример к утверждению задачи).

- Допустим, что линейный оператор F вырожден, тогда существует ненулевая матрица $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, такая что $F(C) = \Theta$, где $\Theta \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ — нулевая матрица.
- Без ограничения общности будем считать, что первая строка матрицы C — ненулевая. Построим матрицу $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, у которой первая строка будет равна первой строке матрицы C с противоположным знаком, а все остальные строки дополним произвольно, чтобы $\det B \neq 0$.
- Так как F — линейный оператор,
$$F(B + C) = F(B) + F(C).$$
- $$0 = \det F(B + C) = \det(F(B) + F(C)) = \det(F(B) + \Theta) = \det F(B) = \det B \neq 0$$

Мы получили противорение, а, следовательно, оператор F обратим.

B. Экстремумы

Функция $g(x)$ при $x \in (-\infty, +\infty)$ задана формулой

$$g(x) = \int_{x-1}^{1-x} e^{t^2}[2022 + (1 - t)\operatorname{sign}(1 + t)]dt$$

Найдите (если существуют) точки локальных максимумов и минимумов функции $g(x)$.

Решение.

- Найдём производную функции $g(x)$:

$$g'(x) = -e^{(x-1)^2}(4044 + x \operatorname{sign}(2 - x) + (2 - x)\operatorname{sign}(x))$$

- Для начала посмотрим на поведение производной в точках $p_1 = 0$ и $p_2 = 2$. Для этого возьмём левые и правые пределы производной в этих точках:
$$\lim_{x \to p_1-} g'(x) = -4042e$$
$$\lim_{x \to p_1+} g'(x) = -4046e$$
$$\lim_{x \to p_2-} g'(x) = -4046e$$
$$\lim_{x \to p_2+} g'(x) = -4042e$$
Видим, что она не определена в точках p_1 и p_2, так левые и правые пределы производной в каждой из этих точек не совпадают. Но нам важно поведению $g(x)$ в этих точках и, так как левые и правые производные в них отрицательны, фунция $g(x)$ в этих точках убывает.

- Теперь найдём нули производной.
Её корни: $x_1 = -2021$ и $x_2 = 2023$.

- Проверим, что происходит в x_1:
При $x < 0$
$$g'(x) = -e^{(x-1)^2}(4042 + 2x)$$
За знак производной отвечает второй сомножитель.
Мы видим, что в точке x_1 производная меняет знак с $+$ на $-$. Это означает, что в x_1 находится локальный максимум.

- Проверим, что происходит в x_2:
При $x > 2$
$$g'(x) = -e^{(x-1)^2}(4046 - 2x)$$
Видим, что в точке x_2 производная меняет знак с $-$ на $+$. Это означает, что в x_2 находится локальный минимум.

Ответ: $x_1 = -2021$ — точка локального максимума, $x_2 = 2023$ — точка локального минимума.

C. Случайный вектор

Пусть задан случайный вектор $v = (X_1, X_2, X_3)$, компоненты которого независимы и распределены равномерно на отрезке $[1, 5]$.

Найдите функцию плотности случайного вектора $w = (X_{(3)}, X_{(2)}, X_{(1)})$, состоящего из компонент вектора v, упорядоченных по невозрастанию.

Решение.

Найдём вначале плотность для $\left(X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}\right)$.

- $P\left(X_{(1)} \leq x_1, X_{(2)} \leq x_2, X_{(3)} \leq x_3\right)$
- Рассмотрим $P\left(y_1 < X_{(1)} \leq x_1, y_2 < X_{(2)} \leq x_2, y_3 < X_{(3)} < x_3\right)$, где $y_1 < x_1 \leq y_2 < x_2 \leq y_3 < x_3$.
- Есть всего $3!$ для компонент исходного вектора получить вероятность выше, поэтому:
$$P\left(y_1 < X_{(1)} \leq x_1, y_2 < X_{(2)} \leq x_2, y_3 < X_{(3)} < x_3\right) = 3! P\left(y_1 < X_1 \leq x_1, y_2 < X_2 \leq x_2, y_3 < X_3 < x_3\right)$$
- Из независимости компонент исходного вектора:
$$P\left(y_1 < X_{(1)} \leq x_1, y_2 < X_{(2)} \leq x_2, y_3 < X_{(3)} < x_3\right) = 3! \prod_{i=1}^{3} \left[F\left(x_i\right) - F\left(y_i\right)\right]$$
- Продифференцируем обе части трижды по каждому из x_i и получим плотность:
$$f_{X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}}\left(x_1, x_2, x_3\right) = 3! f\left(x_1\right) f\left(x_2\right) f\left(x_3\right) I(x_1 < x_2 < x_3)$$

- Вернёмся к вектору $(X_{(3)}, X_{(2)}, X_{(1)})$:
Так как модуль якобиана замены равен 1:

$$f_{X_{(3)},X_{(2)},X_{(1)}}(x_1, x_2, x_3) = 3! f(x_1) f(x_2) f(x_3) I(x_1 > x_2 > x_3)$$

- В нашей задаче получим плотность:

$$f_{X_{(3)},X_{(2)},X_{(1)}}(x_1, x_2, x_3) = \frac{3!}{4^3} I(5 \geq x_1 > x_2 > x_3 \geq 1)$$

Ответ: $\frac{3!}{4^3} I(1 \leq x_3 < x_2 < x_1 \leq 5)$

D. Карабас-Барабас

У Карабаса-Барабаса на столе лежит N кучек монет, в i-й из которых $A[i]$ монет. Карабас любит единообразие, поэтому он добыл ещё k монет и хочет разложить их по уже имеющимся кучкам так, чтобы как можно больше кучек в итоге стали одного размера (он не обязан использовать все k монет). Помогите ему, сочинив алгоритм, принимающий на вход массив $A[1:N]$ и число k и определяющий максимальное число m, для которого добавлением не более чем k монет можно добиться, чтобы m кучек стали одного размера.

Ваш алгоритм должен работать за $O(N \log N)$ операций.

Обязательно обоснуйте работоспособность вашего алгоритма. Оцените его сложность и объём необходимой дополнительной памяти. Мы будем признательны, если описание алгоритма будет дано не листингом кода, а просто текстом, возможно, с привлечением псевдокода.

Формат входных данных В первой строке через пробел указаны натуральные числа N и k. В следующей строке записаны через пробел N чисел: размеры кучек.

Формат вывода Ваша программа должна вывести одно натуральное число: m

Примеры

Ввод	Вывод
3 3 3 2 1	3
3 3 18 9 1	1

Решение.

Алгоритм:

- Отсортируем массив A (с помощью `Merge Sort` или другой сортировкой с трудоемкостью $O(nlogn)$);

- Проходим по отсортированному массиву парой указателей i и j. Чтобы сделать все элементы $A[i:j]$ равными, требуется $max(A[i:j]) \cdot (j-i+1) - sum(A[i:j]) = A[j] \cdot (j-i+1) - sum(A[i:j])$ монет.

- Соответственно, после очередного увеличения j инкрементируем i, пока эта разность не станет меньше или равна k. Сравниваем получившееся $(j-i+1)$ с максимальной длиной, затем снова увеличиваем j на 1. Суммы мы будем пересчитывать на каждом шагу, вычитая $A[i]$ и прибавляя $A[j]$, — это линия.

Почему такой алгоритм работает?

Допустим, у нас есть набор из m кучек, которые можно сделать равными прибавлением не более k монет, но это не набор идущих подряд в отсортированном массиве кучек. Заметим, что минимальное количество монет для выравнивания размеров кучек равно необходимому количеству для того, чтобы дополнить все до максимальной. Если в отсортированном массиве есть кучка, которая лежит строго между минимумом и максимумом, то можно минимум заменить на неё, и на выравнивание потребуется меньше монет (или столько же, если мы пропустили другую такую же по размеру кучку), то есть мы сделаем как минимум не хуже (а возможно, лучше, если лишние монеты получится использовать ещё где-то). Таким образом, проделывая описанные операции, мы всегда сможем найти набор из m стоящих подряд в сортированном порядке кучек. Следовательно, среди подряд идущих наборов кучек есть хотя бы оптимальный.

Сложность алгоритма $O(nlogn)$ на сортировку (если мы использовали `Merge Sort` или `Heap sort`; при использовании `Quick Sort` требуются отдельные замечания про оценку ожидаемого времени работы) $+ O(n)$ на проход двумя указателями. Память — в зависимости от сортировки.

E. Нормаль

Пусть задано два аффинных подпространства V и W в евклидовом пространстве матриц $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ со скалярным произведением $< A, B >= \mathrm{tr}(A^T B)$:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} + L,$$

где L – линейная оболочка матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, а W – аффинное подпространство, заданное матричным уравнением:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} -21 & 37 \\ 63 & -111 \end{pmatrix}$$

Найдите общий перпендикуляр P между этими подпространствами.

Решение.

W и L — два аффинных подпространства.
Каким образом можно задать аффинное подпространства?
Например, можно задать его точкой исходного пространства и линейной комбинацией векторов, приложенной к данной точке.
Простым примером данной конструкции служит прямая на плоскости:

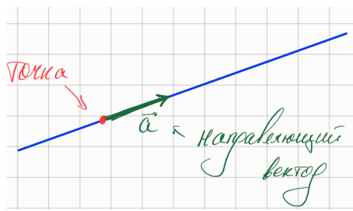

Рис. 1: Прямая на плоскости

- Подпространство V является прямой в пространстве матриц.

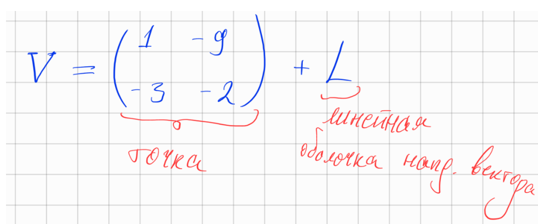

Рис. 2: V

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} + < L_1 >,$$

где

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

- Решив систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} -21 & 37 \\ 63 & -111 \end{pmatrix},$$

получим

$$W = M + < M_1, M_2 >,$$

где

$$M = \begin{pmatrix} -21 & 37 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Наша цель — найти ненулевую матрицу P, перпендикулярную L и M:

$$\operatorname{tr}\left(P^T\tilde{L}\right) = 0, \quad \forall \tilde{L} \in L$$
$$\operatorname{tr}\left(P^T\tilde{M}\right) = 0, \quad \forall \tilde{M} \in M$$

  Ясно, что это эквивалентно перпендикулярности P базисным векторам L и W: $\{L_1, M_1, M_2\}$

- Пусть

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix}$$

  . Расписав условия перпендикулярности, получим систему уравнение:

$$\begin{cases} P_1 + 5P_2 + 4P_3 = 0 \\ -2P_1 + P_3 = 0 \\ -2P_2 + P_4 = 0 \end{cases}$$

  Решив её, получим, что

$$P = \beta \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -10 & 18 \end{pmatrix},$$

  где $\beta \in \mathbb{R}$ то есть P — линейная оболочка матрица.

- Осталось найти концы перпендикуляра. Для этого решим систему:

$$\begin{pmatrix} -21 - 2y + 5r & 37 - 2z - 9r \\ y + 10r & z - 18r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 & 5x-9 \\ 4x-3 & -2 \end{pmatrix}$$

- Получим две матрицы:

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -9 & 16 \end{pmatrix} \text{и} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

F1. Дисперсия

Пусть заданы две независимые случайные величины X и Y экспоненциально распределённые с параметрами $\mu = 1$ и $\lambda = 2$ соответственно.
Найдите дисперсию величины T, где:

$$T = \begin{cases} 1, & Y > X, \\ 0, & Y \leq X \end{cases}$$

Решение.

-
$$\mathbb{V}(T) = \mathbb{V}(I(X<Y)) = \mathbb{E}(I(X<Y)) - [\mathbb{E}(I(X<Y))]^2 = \mathbb{P}(X<Y)[1 - [\mathbb{P}(X<Y)]$$

-
$$\mathbb{P}(X<Y) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X<y)p_Y(y)dy = 2\int_0^{+\infty}(1-e^{-y})e^{-2y}dy = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{2}{9}$

G. Граф

Дан граф со 120 вершинами (без петель и кратных рёбер). Известно, что самый короткий несамопересекающийся цикл в этом графе состоит из 12 вершин. Верно ли, что в графе найдётся вершина, из которой выходит менее 3 рёбер?

Решение.

В условии есть три ограничения на структуру графа:

- (I) В графе 120 вершин;
- (II) Самый короткий несамопересекающийся цикл состоит из 12 вершин;
- (III) В графе найдется вершина, из которой выходит менее 3 ребер.

Мы будем использовать доказательство от противного и попытаемся построить граф, удовлетворяющий (I) и (II), но не (III) (что можно записать как выполнение условия $\overline{\text{III}}$ ("не III").

Процесс построения графа будем симулировать с помощью подвешивания графа: сначала выделим одну его вершину, скажем, что она и есть нулевой слой. Далее будем действовать итеративно - для i-го слоя построим все необходимые по условию $\overline{\text{III}}$ ребра так, чтобы они удовлетворяли условию (II). В итоге либо построим контрпример, либо придем к противоречию. Противоречие будет означать, что построить граф, удовлетворяющий (I), (II), $\overline{\text{III}}$ невозможно.

Предположим противное: пусть вершин степени менее 3 нет. Возьмем A - некоторую вершину графа **G**. Подвесим **G** за вершину A, тогда все вершины графа попадут в один из слоев подвески. Слои будем строить итеративно - в слой $i+1$ для $i < 5$ поместим все ребра, исходящие из вершин i-го слоя вне $i-1$-го слоя. Все оставшиеся вершины поместим в 6 слой.

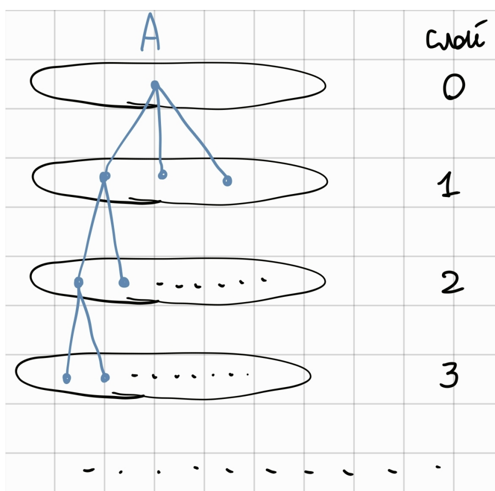

Рис. 3: Слои графа при подвеске за A

Обозначим $S(i)$ число вершин $i-$того слоя. Сама вершина A лежит на 0 слое, то бишь $s(0) = 1$.

Вершина A имеет степень ≥ 3, откуда $s(1) \geq 3$.

Покажем также, что $s(i+1) \geq s(i) \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Если новые ребра из вершины i-того слоя идут в слой с номером менее $i+1$, существует цикл длины $2 \cdot i + 1 < 12$, проходящий через A, так как степень каждой вершины i-того слоя не менее 3, то есть каждая вершина i-го слоя связана с не менее 2 вершинами $i+1$-го слоя, и $s(i+1) \geq s(i) \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Отсюда имеем

- $s(1) \geq 3$
- $s(2) \geq 6$
- $s(3) \geq 12$
- $s(4) \geq 24$
- $s(5) \geq 48$

Возможны 2 случая:

1. $s(6) = 0$

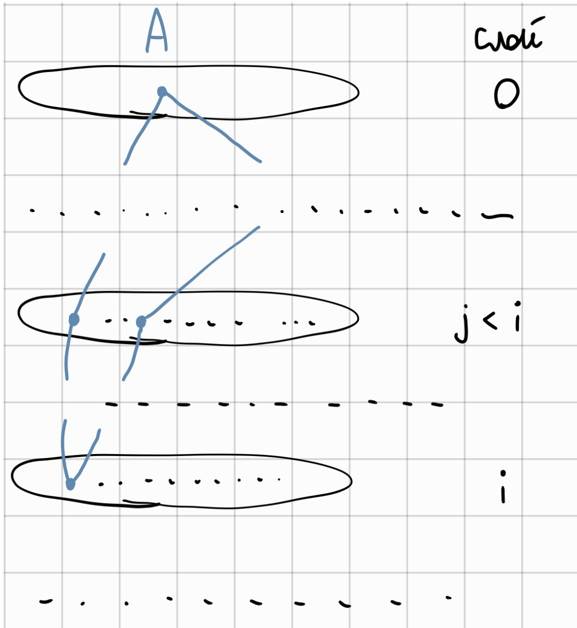

Рис. 4: Новые ребра из слоя i, $i < 5$, не могут идти в слой $j < i$

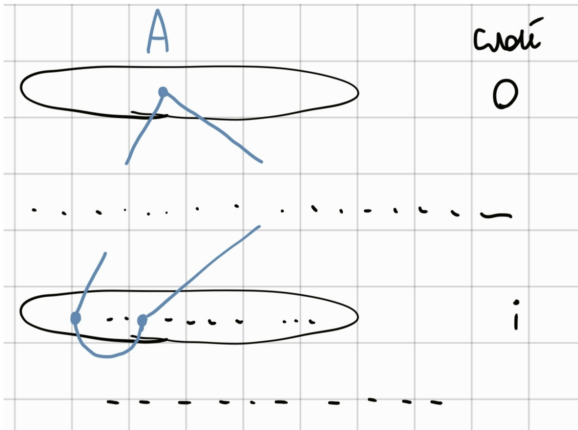

Рис. 5: Новые ребра из слоя i, $i < 5$, не могут идти в слой i

Выберем вершину 5 слоя B. Ее степень не менее 3. Выберем вершину 4 слоя, с которой она соединена, и любую другую, с которой она соединена. Получим цикл длины $\leq 5 + 5 + 1 = 11$, противоречие.

2. $s(6) \neq 0$

   $s(6) = 120 - \sum_{i=0}^{5} s(i)$

   $s(6) \leq 120 - 1 - 3 - 6 - 12 - 24 - 48 = 26$.

   Между слоями 5 и 6 хотя бы $48 \cdot 2 = 96$ ребер (из 3 ребер, исходящих из вершин 5 слоя, хотя бы 2 идут на слой 6). Отсюда по принципу Дирихле на 6 слое найдется вершина степени не менее $\frac{96}{26} > 3$, значит, на слое 6 найдется хотя бы одна вершина степени не менее 4. Назовем ее A^*.

   Подвесим теперь $\mathbf{G}$ за A^*. Получим для новых слоев:
   - $s(1) \geq 4$
   - $s(2) \geq 8$
   - $s(3) \geq 16$
   - $s(4) \geq 32$
   - $s(5) \geq 64$

   Откуда $\sum_{i=0}^{5} s(i) \geq 1 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 125$, что противоречит ограничению (I).

Итак, в каждом случае получили противоречие с выполнением одновременно ограничений (I), (II), $\overline{\text{III}}$. Значит, в графе, описанном в задаче, всегда найдется вершина степени менее 3.

H. Неравенство

Пусть $g(x)$ – непрерывная функция, заданная на отрезке $[0, 1]$. Верно ли, что:

$$\int_0^1 \int_0^1 |g(x) + g(y)| dxdy \geq \int_0^1 |g(x)| dx \ ?$$

Решение.

Без ограничения общности задачу можно переформулировать следующим образом:
Пусть заданы независимые случайные величины $X, Y \sim U[0, 1]$.
Верно ли, что $\mathbb{E}(|g(X) + g(Y)|) \geq \mathbb{E}(|g(X)|)$, где $g(x)$ — непрерывная функция?

- Введём следующие обозначения:

$$p^- = \mathbb{P}_X[g(X) < 0]$$

$$p^+ = \mathbb{P}_X[g(X) \geq 0]$$

$$I^+ = \mathbb{E}_X(|g(X)|I(g(X) \geq 0))$$
$$I^- = \mathbb{E}_X(|g(X)|I(g(X) < 0))$$

Ясно, что $\mathbb{E}_X(|g(X)|) = I^- + I^+$.

Из неравенства треугольника ($|a+b| \geq \Big||a| - |b|\Big|$)

$$\mathbb{E}_{X,Y}[|g(X) + g(Y)|I(g(X) \geq 0,\ g(Y) < 0] \geq$$
$$\mathbb{E}_X[(|f(X)|I(g(X) \geq 0)]\mathbb{P}[g(Y) < 0] - \mathbb{E}_Y[|f(Y)|I(g(Y) < 0)]\mathbb{P}[g(X) \geq 0] = \Big|I^+p^- - I^-p^+\Big|$$

.

- $$\mathbb{E}_{X,Y}[|g(X)+g(Y)|I(g(X)g(Y) \leq 0] = \mathbb{E}_{X,Y}[|g(X)+g(Y)|I(g(X) \geq 0,\ g(Y) < 0]+\mathbb{E}_{X,Y}[|g(X)+g(Y)|I(g(X) < 0,\ g(Y) \geq 0] \geq$$
$$2\Big|I^+p^- - I^-p^+\Big|$$

- $$\mathbb{E}_{X,Y}[|g(X) + g(Y)|I(g(X) \geq 0, g(Y) \geq 0] = 2I^+p^+$$
$$\mathbb{E}_{X,Y}[|g(X) + g(Y)|I(g(X) < 0, g(Y) < 0] = 2I^-p^-$$

- Воспользуемся всем найденным выше и хитрым образом перегруппируем слагаемые в выражении:

$$\mathbb{E}_{X,Y}(|g(X) + g(Y)|) - \mathbb{E}_X(|g(X)|) \geq 2\Big|I^+p^- - I^-p^+\Big| + 2I^+p^+ + 2I^-p^- - (I^- + I^+)(p^+ + p^-) =$$
$$\max[0, 2(I^+p^- - I^-p^+), 2(I^+p^+ - I^-p^-)] + 2I^+p^+ + 2I^-p^- - (I^- + I^+)(p^+ + p^-) =$$
$$\max[(p^+ - p^-)(I^+ - I^-), (p^+ - p^-)(I^+ + I^-) + 2p^-(I^- - I^+), (p^- - p^+)(I^+ + I^-) + 2p^+(I^+ - I^-)]$$

Можем заметить, что вне зависимости от знаков $(p^- - p^+)$ и $(I^+ - I^-)$ последнее выражение неотрицательно.