

## ШАД. Экзамен.

1. Найдите  $\prod_{k=1}^{\infty} \cos(x2^{-k})$ .
2. Дана матрица  $A$  размера  $n \times n$ , где  $a_{ij} = (i - j)^2$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Найдите ранг матрицы  $A$ .
3. Имеется множество  $A = \{1, 2, 3, \dots, 256\}$ . Найдите размер максимального по мощности подмножества  $A' \subset A$ , такого, что  $A'$  не содержит элементов  $x, y$ , таких, что  $x = 2y$ .
4. На окружности случайно выбирается  $n$  точек. Найдите вероятность того, что все они принадлежат некоторой полуокружности.
5. Назовем двумерный массив действительных чисел  $A[1..n][1..n]$  возрастающим, если для любых  $k, l$   $A[k][l] \geq A[i][j]$ ,  $i \leq k$ ,  $j \leq l$ . Задача поиска в квадратном возрастающем массиве формулируется так: для заданного возрастающего массива  $A[1..n][1..n]$  и некоторого числа  $X$  определить, встречается ли число  $X$  в массиве  $A$ . Покажите, что не существует алгоритма, решающего эту задачу менее чем за  $n$  сравнений.
6. У линейного преобразования  $n$ -мерного пространства существует  $n + 1$  собственных векторов, таких что любые  $n$  из них линейно независимы. Найдите всевозможные матрицы, которые могли бы задавать такое преобразование.
7. Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n(n+1)},$$

где  $f(n)$  – количество единиц в двоичном представлении числа  $n$ .