

Вступительный экзамен в Школу анализа данных  
Международная зимняя школа по программированию  
Харьков, Украина, 19 февраля 2014

1. Найдите все квадратные вещественные матрицы порядка 3, удовлетворяющие уравнению  $X^2 + E = 0$ .
2. Среди участников похода из любых четырех как минимум один знаком с тремя другими. Докажите, что каждый участник похода, кроме максимум трех, знаком со всеми остальными.
3. Опишите все невырожденные вещественные матрицы  $A$ , для которых все элементы матриц  $A$  и  $A^{-1}$  неотрицательны.
4. Дан числовой массив длины  $n$ . Предложите алгоритм, находящий максимальное значение сумм отрезков этого массива. Ограничение по времени —  $O(n)$ , по дополнительной памяти —  $O(1)$ .
5. Есть 10 монет разного веса и некоторые веса. При помощи одного взвешивания на весах можно узнать для выбранных двух монет, какая тяжелее. Можно ли за 20 взвешиваний узнать, в каком порядке монеты идут по весу?
6. Вычислите сумму интегралов:

$$\int_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/3}} \sin(x^2) dx + \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{\arcsin x} dx.$$

7. Игра состоит из одинаковых и независимых конов, в каждом из которых выигрыш происходит с вероятностью  $p$ . Когда игрок выигрывает, он получает 1 доллар, а когда проигрывает — платит 1 доллар. Как только его капитал достигает величины  $N$  долларов, он объявляется победителем и удаляется из казино. Найдите вероятность того, что игрок рано или поздно проиграет все деньги, в зависимости от его стартового капитала  $K$ .
8. Пусть  $a$  — действительное число. Для каждого целого  $n \geq 0$  обозначим через  $a_n$  расстояние от  $a$  до ближайшего рационального числа вида  $\frac{m}{2^n}$ , где  $m$  — целое. Найдите наибольшую возможную сумму ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .