

Вступительный экзамен в Школу анализа данных
Международная зимняя школа по программированию
Харьков, Украина, 19 февраля 2014

1. Найдите все квадратные вещественные матрицы порядка 3, удовлетворяющие уравнению $X^2 + E = 0$.
2. Среди участников похода из любых четырех как минимум один знаком с тремя другими. Докажите, что каждый участник похода, кроме максимум трех, знаком со всеми остальными.
3. Опишите все невырожденные вещественные матрицы A , для которых все элементы матриц A и A^{-1} неотрицательны.
4. Дан числовой массив длины n . Предложите алгоритм, находящий максимальное значение сумм отрезков этого массива. Ограничение по времени — $O(n)$, по дополнительной памяти — $O(1)$.
5. Есть 10 монет разного веса и некоторые весы. При помощи одного взвешивания на весах можно узнать для выбранных двух монет, какая тяжелее. Можно ли за 20 взвешиваний узнать, в каком порядке монеты идут по весу?
6. Вычислите сумму интегралов:

$$\int_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/3}} \sin(x^2) dx + \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{\arcsin x} dx.$$

7. Игра состоит из одинаковых и независимых конов, в каждом из которых выигрыш происходит с вероятностью p . Когда игрок выигрывает, он получает 1 доллар, а когда проигрывает — платит 1 доллар. Как только его капитал достигает величины N долларов, он объявляется победителем и удаляется из казино. Найдите вероятность того, что игрок рано или поздно проиграет все деньги, в зависимости от его стартового капитала K .
8. Пусть a — действительное число. Для каждого целого $n \geq 0$ обозначим через a_n расстояние от a до ближайшего рационального числа вида $\frac{m}{2^n}$, где m — целое. Найдите наибольшую возможную сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.