Вступительный экзамен в Школу анализа данных

28 мая 2016

1. Пусть A и B — квадратные ненулевые матрицы одинакового размера. Верно ли, что если $ABA = A$, то $BAB = B$?

2. Исследуйте на сходимость ряд
$$\sum_{n=3}^{\infty} (\ln \ln n)^{-\ln n}.$$

3. Случайные величины X и Y независимы. Плотность случайной величины X равна $p_X(t) = \frac{t}{2} \cdot I_{[0;2]}(t)$ (где $I_{[0;2]}(t)$ — индикаторная функция отрезка $[0; 2]$), а Y имеет равномерное распределение на отрезке $[0; 3]$. Найдите вероятность того, что из отрезков с длинами X, Y и 1 можно составить треугольник.

4. Даны n отрезков $[a_i, b_i]$. Назовём *индексом вложенности* отрезка $[a_i, b_i]$ количество отрезков, которые его содержат. Предложите алгоритм, определяющий, есть ли в наборе отрезок с индексом вложенности, превышающим 1000. Ограничение по времени — $O(n \log n)$, по дополнительной памяти — $O(n)$.

5. Существует ли непрерывная функция $f(x)$, для которой $f(f(x)) = 1 - x^3$?

6. В ряд расположены m предметов. Случайно выбираются k предметов, $k < m$. Случайная величина X равна количеству таких предметов i, что i выбран, а все его соседи не выбраны. Найдите математическое ожидание X.

7. В графстве Орэ имеется несколько городов, соединённых дорогами, причём из каждого города выходит ровно три таких дороги. Инквизитор брат Франсуа странствует по графству, искореняя ересь. Выехав из города Э, он едет по дорогам, причём после каждого посещённого им города он поворачивает либо направо, либо налево по отношению к дороге, по которой приехал, и никогда не сворачивает в ту сторону, в которую он свернул перед этим. Докажите, что рано или поздно брат Франсуа вернётся в город Э.

8. Пусть A и B — симметричные билинейные функции на двумерном вещественном пространстве, причём A положительно определена, а B отрицательно определена. Докажите, что любая непрерывная кривая в пространстве симметричных билинейных функций, соединяющая A и B, содержит функцию с вырожденной матрицей.