

Вступительный экзамен в Школу анализа данных

Новый трек поступления, демонстрационный вариант

1. Найдите наибольшее и наименьшее значение, если они существуют, а также множество всех значений, которые может принимать функция

$$f(x) = \frac{x^4 - 6x^2 + 5}{|x - 1|}$$

2. В ряд выложены пять красных, пять синих и пять зелёных шаров. С какой вероятностью никакие два синих шара не лежат рядом?
3. Докажите, что для монотонно возрастающей функции $f(x)$ уравнения $x = f(f(x))$ и $x = f(x)$ равносильны (то есть каждый корень одного является корнем другого).
4. Электрическая цепь представляет собой связный неориентированный граф без кратных рёбер, в котором рёбра (числом N) — это провода, а вершины — либо лампочки, либо единственный источник тока. На каждом ребре размещено реле. Лампочка горит, если существует путь, соединяющий её с источником тока, вдоль которого все реле находятся в положении «включено». Известно, что ровно одно из реле бракованное и никогда не пропускает ток. Вы можете включать и отключать реле и видите, горят ли лампочки. Изначально все выключатели находятся в положении «включено». Опишите способ нахождения неисправного реле за $O(N)$ операций включения-выключения.
5. Докажите, что среди шести человек обязательно найдутся трое попарно знакомых или трое попарно незнакомых.
6. На столе лежат четыре карточки, на которых сверху написано А, Б, 4, 5. Про то, что написано на обратных их сторонах, ничего не известно. Какое наименьшее количество карточек надо перевернуть, чтобы проверить истинность утверждения «Если на одной стороне карточки написано чётное число, то на другой стороне — гласная буква»? Обязательно объясните ответ.
7. Докажите, что равносторонний треугольник нельзя покрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками.
8. Квадратная матрица такова, что $\text{tr}(AX) = 0$ для любой матрицы X того же размера, имеющей нулевой след (напомним, что след матрицы — это сумма элементов на главной диагонали). Докажите, что матрица является скалярной (т.е. имеет вид λE для некоторого λ , где E — единичная матрица).