Задача 1. Предел отношения

Из письменного экзамена в ШАД 2019 года

Условие. Известно, что $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin x} = 2$. Чему равен предел $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{f(x)}$?

Ответ. $\frac{3}{2}$

Решение. Поскольку

$$f(x) = \frac{f(x)}{\sin x} \cdot \sin x \longrightarrow 2 \cdot 0 = 0 \ (x \to 0),$$

мы имеем дело с неопределённостью вида $\frac{0}{0}$.

Перепишем искомый предел в виде

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{f(x)}$$

Дробь $\frac{\sin x}{f(x)}$ стремится к $\frac{1}{2}$. Предел первого сомножителя можно найти с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{1+3x}}{\cos x} = \frac{3/1}{1} = 3$$

Задача 2. Матрица проекции

Из письменного экзамена в ШАД 2019 года

Условие. Заполните третий столбец матрицы

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & ? \\ -2 & 2 & ? \\ -1 & -2 & ? \end{pmatrix}$$

если известно, что это матрица ортогональной проекции на некоторую плоскость.

Ответ.

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение. Решать можно по-разному. Например, вспомнить, что матрица ортогонального проектора удовлетворяет условиям $A^T = A$ (это сразу позволяет заполнить элементы с номерами $(1,3)$ и $(2,3)$) и $A^2 = A$ (откуда мы найдём последний элемент, например, приравняв элементы с номером $(3,1)$ матриц A и A^2: $\frac{1}{36}(-5+4-x) = -\frac{1}{6}$, откуда $-1-x=-6$, то есть $x=5$).

С другой стороны, можно воспользоваться тем, что столбцы матрицы линейного оператора — это образы базисных векторов. При этом плоскость, на которую мы проецируем, является линейной оболочкой Ae_1 и Ae_2 (они, к счастью, не пропорциональны), то есть первых двух столбцов матрицы. Тогда третий столбец матрицы — это проекция вектора e_3 на эту плоскость.

Чтобы найти проекцию, вспомним, что проекция вектора v на плоскость $\langle w_1, w_2\rangle$, являющуюся линейной оболочкой ортогональных векторов w_1 и w_2, находится по формуле

$$\frac{(w_1, v)}{(w_1, w_1)} w_1 + \frac{(w_2, v)}{(w_2, w_2)} w_2$$

Таким образом, нам достаточно построить ортогональный базис плоскости $\langle Ae_1, Ae_2\rangle$ (линейной оболочки первых двух столбцов матрицы A). Сделать это можно с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта.

$$w_1 = u_1,$$
$$w_2 = u_2 - \frac{(w_1, u_2)}{(w_2, w_2)} w_2$$

Подставив числа, получаем тот же ответ.

Задача 3. Математическое ожидание числа шаров

Из письменного экзамена в ШАД 2019 года

Условие. В корзине лежит m чёрных шаров и n красных. Мы достаём из корзины случайный шар и, если он чёрный, то заменяет его на красный, а если он красный, то кладёт его обратно. Найдите математическое ожидание числа красных шаров в корзине после k итераций этой процедуры.

Ответ. : $n + m\left(1 - \left(\frac{m+n-1}{m+n}\right)^k\right)$

Решение. : Рассмотрим индикаторные величины

$$I_j = \mathbb{I}\{j\text{-й чёрный шар стал красным после } k \text{ итераций}\}$$

Легко видеть, что число красных шаров после k итераций замен равно $n + \mathbb{E}\left(\sum_j I_j\right) = n + \sum_j \mathbb{E}I_j$ (число шаров, которые с самого начала были красными, плюс количество чёрных шаров, сменивших цвет). Следовательно, математическое ожидание равно

$$\mathbb{E}\left(n + \sum_j I_j\right) = n + \sum_j \mathbb{E}I_j$$

Математическое ожидание любой из индикаторных величин I_j вычисляется очень легко:

$$\mathbb{E}I_j = 0 \cdot P(I_j = 0) + 1 \cdot P(I_j = 1) = P(I_j = 1)$$

Все I_j распределены одинаково. Вероятность $P(I_j = 0)$, то есть вероятность того, что j-й чёрный шар не поменял цвета после k итераций, равна вероятности того, что этот шар ни разу не был вытащен, то есть $\left(\frac{m+n-1}{m+n}\right)^k$. Следовательно, $P(I_j = 1) = 1 - \left(\frac{m+n-1}{m+n}\right)^k$ Таким образом, матожидание числа красных шаров равно

$$n + m\left(1 - \left(\frac{m+n-1}{m+n}\right)^k\right)$$

Задача 4. Геометрическая вероятность

Из письменного экзамена в ШАД 2019 года

Условие. Лёша и Марина договорились встретиться между 8:00 и 9:00 и вместе пойти на экзамен в ШАД. Каждый из них приходит на место встречи в случайный момент времени, ждёт 15 минут и уходит (никому не хочется опоздать на экзамен). Являются ли независимыми события "Лёша и Марина не встретились" и "хотя бы один из них пришёл после 8:45"? Время считайте непрерывным.

Ответ. Нет

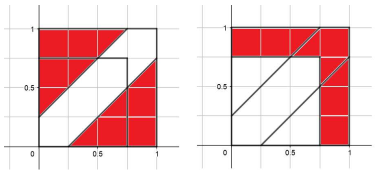
Решение. : Времена прихода Лёши и Марины можно представить как точки (x, y) квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$. В этом случае первое событие — это

$$A = \left\{ |x - y| > \frac{1}{4} \right\},$$

а второе — это

$$B = \left\{ \max(x, y) > \frac{3}{4} \right\}$$

Изобразим их на координатной плоскости:



События независимы, если $P\{A \cap B\} = P\{A\} \cdot P\{B\}$. Нетрудно найти, что

$$P\{A\} = \frac{9}{16}, \qquad P\{B\} = \frac{7}{16}$$

При этом

$$P\{A \cap B\} = \frac{5}{16}, \qquad P\{A\} \cdot P\{B\} = \frac{9}{16} \cdot \frac{7}{16}$$

Так как эти вероятности не равны, события не являются независимыми.

Задача 5. Предел и вероятности

Из письменного экзамена в ШАД 2019 года

Условие. Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{5n} C_{k-1}^{n-1}\left(\frac{1}{5}\right)^n\left(\frac{4}{5}\right)^{k-n}$$

Ответ. $\frac{1}{2}$

Решение. Перепишем немного выражение, стоящее под знаком суммы:

$$C_{k-1}^{n-1}\left(\frac{1}{5}\right)^n\left(\frac{4}{5}\right)^{k-n} = C_{k-1}^{n-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{(k-1)-(n-1)}\cdot\frac{1}{5}$$

Нетрудно видеть, что это вероятность того, что в серии испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p=\frac{1}{5}$ n-й по счёту успех произойдёт на k-м шаге. В самом деле, это произведение вероятности $C_{k-1}^{n-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{(k-1)-(n-1)}$ того, что среди первых $(k-1)$ испытаний случился ровно $(n-1)$ успех, на вероятность ещё одного успеха.

Теперь, сумма $\sum_{k=n}^{5n} C_{k-1}^{n-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{(k-1)-(n-1)}\cdot\frac{1}{5}$ равна вероятности того, что в серии испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p=\frac{1}{5}$ n-й по счёту успех случится не позже испытания с номером $5n$ (в самом деле, раньше n-й попытки он никак не может произойти).

Обозначим через $\xi_1,\ldots,\xi_n$ независимые случайные величины, распределённые как номер первого успеха в серии испытаний Бернулли с вероятностью успеха $\frac{1}{5}$. Отметим, что их математическое ожидание $\mathbb{E}\xi_i$ равно 5; этот факт нам пригодится в дальнейшем. Кроме того, заметим, что сумма $\xi_1+\ldots+\xi_n$ распределена как раз таки как номер n-го успеха (мы можем считать, что после очередного успеха счёт попыток обнуляется — тогда следующий успех оказывается как бы первым). Таким образом, мы ищем предел

$$P\left(\xi_1+\ldots+\xi_n\leqslant 5n\right)$$

Как мы уже отмечали выше, $\mathbb{E}\xi_i=5$, то есть

$$P\left(\sum_i\xi_i\leqslant 5n\right)=P\left(\sum_i\left(\xi_i-\mathbb{E}\xi_i\right)\leqslant 0\right)=P\left(\frac{\sum\limits_i\left(\xi_i-\mathbb{E}\xi_i\right)}{\sqrt{n\mathbb{D}\xi_i}}\leqslant 0\right)$$

А предел этого выражения равен $\frac{1}{2}$ по центральной предельной теореме.

Задача 6. Размерности

Из письменного экзамена в ШАД 2019 года

Условие. Для квадратной вещественной матрицы A размера $n \times n$ и вектора $v \in \mathbb{R}^n$ положим:

$$U(A) = \{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}, \quad W(A, v) = \langle v, Av, A^2v, A^3v, \dots\rangle$$

Пусть матрица A такова, что $\dim W(A, v) = n$ для любого $v \neq 0$. Какова максимально возможная размерность $U(A)$?

Ответ. 2

Решение. Подпространство $W(A, v)$ является инвариантным относительно A, то есть $Aw \in W(A, v)$ для любого $w \in W(A, v)$: в самом деле,

$$A(\lambda_0 v + \lambda_1 Av + \lambda_2 A^2 v) = \lambda_0 Av + \lambda_1 A^2 v + \lambda_2 A^3 v + \ldots \in W(A, v)$$

Более того, оно в некотором смысле минимально: если v — некоторый вектор и L — содержащее его инвариантное подпространство, то $L \ni v, Av, A^2v, \ldots$, $L \supseteq W(A, v)$.

Известно, что в вещественном пространстве каждый оператор (и A в том числе) имеет одномерное или двумерное инвариантное подпространство. Для вектора v, лежащего в таком подпространстве, имеем $n = \dim W(A, v) \leqslant 2$. Теперь мы рассмотрим два случая.

Случай 1. У A есть одномерное инвариантное подпространство. Оно должно иметь вид $\langle v_0\rangle$ для некоторого вектора v_0. Так как $Av_0 \in \langle v_0\rangle$, вектор v_0 является собственным для A. Отсюда сразу следует, что $n = \dim W(A, v_0) = \dim\langle v_0\rangle = 1$. Поскольку все матрицы 1×1 являются просто числами и, конечно же, коммутируют, мы сразу получаем, что $\dim U(A) = 1$.

Случай 2. У A нет одномерных инвариантных подпространств. Таким образом, у него нет и собственных векторов, но тогда непременно есть двумерное инвариантное подпространство. Возьмём такое подпространство L и некоторый ненулевой $v_0 \in L$. Тогда $n = \dim W(A, v_0) = \dim L = 2$ (напомним, $W(A, v_0)$ не может быть одномерным, так как иначе v_0 был бы собственным), и соответственно, n равно 2.

Характеристический многочлен $\chi_A(t)$ не имеет вещественных корней (ведь собственных значений нет), а потому он имеет два комплексных сопряжённых друг другу корня z и $\overline{z}$. Комплексной заменой координат A приводится к виду

$$B = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{pmatrix}$$

Обозначим через $U_{\mathbb{C}}(X)$ множество комплексных матриц 2×2, коммутирующих с некоторой матрицей X. Тогда нетрудно убедиться, что

$$U_{\mathbb{C}}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \middle|\, t_1, t_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

то есть $\dim U_{\mathbb{C}}(B) = 2$ (это размерность $U_{\mathbb{C}}(B)$ как комплексного пространства).

Теперь от $\dim U_{\mathbb{C}}(B)$ мы должны прийти к $\dim U(A)$, и мы сделаем это в два шага.

Шаг 1. От $\dim U_{\mathbb{C}}(B)$ **к** $\dim U_{\mathbb{C}}(A)$. Матрица B получается из матрицы A заменой координат: $B = C^{-1}AC$, где C — некоторая невырожденная комплексная матрица. Заметим, что если

$$Y \in U_{\mathbb{C}}(B), \text{ то есть } YB = BY,$$

то

$$\begin{gathered} C * | \quad YC^{-1}AC = C^{-1}ACY \quad | * C^{-1} \\ \underbrace{CYC^{-1}}_{=:Z} A \underbrace{CC^{-1}}_{=E} = \underbrace{CC^{-1}}_{=E} A \underbrace{CYC^{-1}}_{=:Z} \\ ZA = AZ \end{gathered}$$

То есть если $Y \in U_{\mathbb{C}}(B)$, то $CYC^{-1} \in U_{\mathbb{C}}(A)$. Нетрудно проверить, что аналогичным образом работает и обратное преобразование: если $Z \in U_{\mathbb{C}}(A)$, то $C^{-1}ZC \in U_{\mathbb{C}}(B)$. Таким образом, отображение $Y \mapsto CYC^{-1}$ осуществляет изоморфизм линейных пространств $U_{\mathbb{C}}(B)$ и $U_{\mathbb{C}}(A)$, откуда сразу следует равенство их размерностей.

Шаг 2. От $\dim U_{\mathbb{C}}(A)$ **к** $\dim U(A)$. Заметим, что $AX = XA$ — это однородная система уравнений на элементы X с вещественными коэффициентами, и размерность пространства её решений одна и та же над любым полем, содержащим поле вещественных чисел.

Вывод. Итак, во втором случае максимально возможная размерность $U(A)$ равна 2.

Задача 7. Неравенство для производной

Из письменного экзамена в ШАД 2019 года

Вещественнозначная функция f определена на отрезке $[a;b]$ $(b-a \geqslant 4)$ и дифференцируема на нём. Докажите, что найдётся точка $x_0 \in (a;b)$, для которой

$$f'(x_0) < 1 + f^2(x_0)$$

Решение. Заметим прежде всего, что

$$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)} = (\operatorname{arctg}(f(x)))'$$

По теореме Лагранжа о среднем значении для $a < x_1 < x_2 < b$ найдётся точка $x_1 < x_0 < x_2$, для которой

$$|\operatorname{arctg} f(x_2) - \operatorname{arctg} f(x_1)| = \frac{f'(x_0)}{1+f^2(x_0)}(x_2 - x_1)$$

Отсюда

$$\frac{f'(x_0)}{1+f^2(x_0)}(x_2 - x_1) \leqslant \pi$$

Следовательно,

$$\frac{f'(x_0)}{1+f^2(x_0)} \leqslant \frac{\pi}{x_2 - x_1} < 1$$

для некоторых x_1, x_2: ведь $b - a \geqslant 4$, то есть найдётся x_1, x_2, для которой $x_2 - x_1 > \pi$.

Задача 8. Рёбра в графе

Из письменного экзамена в ШАД 2019 года

Дан граф с 40 вершинами без петель и кратных рёбер. Известно, что среди любых 5 вершин найдется одна, соединенная с четырьмя остальными. Каково минимально возможное число ребер в этом графе?

Ответ 760.

Решение. Для удобства инвертируем задачу: заменим все рёбра на «отсутствия рёбер» и наоборот. Теперь нашу задачу можно переформулировать следующим образом: какое максимальное число ребер можно провести в графе на 40 вершинах таким образом, чтобы из любых пяти хотя бы одна не была смежна с оставшимися четырьмя?

Пусть есть компонента связности из хотя бы 3 вершин. Тогда возьмем в ней связную подкомпоненту из 3 вершин. Заметим, что из оставшихся 37 вершин никакие две не могут быть смежны: ведь иначе бы мы взяли их и вместе с исходными тремя и получили бы пятёрку вершин, среди которых нет ни одной, не смежной с остальными. Далее, заметим, что от наших трёх вершин рёбра могут идти не более чем к одной вершине. Если ребра из исходных трёх ведут хотя бы к двум вершинам, возьмем исходные три вершины и эти две, и снова получится недопустимся пятёрка вершин. Получается, если есть компонента связности хотя бы из 3 вершин, то наиболее насыщенный рёбрами граф, который может получиться, — это K_4 (граф с 4 вершинами, попарно соединёнными рёбрами), в котором 6 рёбер.

Если же нет компоненты из хотя бы 3 вершин, то во всех компонентах связности по одной или по две вершины. Значит, максимум может быть 20 пар по 2 вершины, то есть 20 ребер.

Таким образом, в исходной задаче у нас может быть максимум 20 «отсутствий рёбер», то есть рёбер в нашем графе хотя бы

$$\frac{40 \cdot 39}{2} - 20 = 760$$

Задача 9. Индекс ближайшего превосходящего элемента

Из письменного экзамена в ШАД 2019 года

Условие. В массиве A длины n для каждого i-го элемента найдите такой ближайший к нему j-й элемент, что $j > i$ и $\mathrm{a}_j \geq 2a_i$.

Решение. Для каждого $i = n..1$:

(1) Выполним бинарный поиск по массиву, который назовём массивом кандидатов. Будем искать элемент, больше либо равный $2a_i$.
(2) Если $a_{i-1} \leq a_i$, то запишем a_i в конец массива кандидатов.
(3) Если $a_{i-1} > a_i$ и в массиве кандидатов есть элементы меньше, чем a_{i-1}, то удалим их из массива кандидатов.