

# Всероссийская олимпиада студентов «Я – профессионал»

## Демонстрационный вариант

задания заключительного (очного) этапа

по направлению «Электроника и наноэлектроника»

Категория участия: «Магистратура/специалитет»  
(для поступающих в аспирантуру/ординатуру)

### Б.1.

Найти собственные значения и собственные функции оператора  $\hat{S}_x$  частицы со спином  $s = \frac{1}{2}$ , если в качестве оси квантования спина выбрана ось  $z$ .

При выборе оси  $z$  в качестве оси квантования спина оператор имеет следующий вид:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Будем использовать спинорное представление для волновой функции частицы. Тогда рассмотрим уравнение:

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = S_x \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

где  $S_x$  — искомые собственные значения, а  $\varphi_1(\vec{r})$  и  $\varphi_2(\vec{r})$  - неизвестные компоненты спиноров, играющих роль “собственник функций” оператора  $S_x$ . Матричное уравнение (1) удобно переписать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} -S_x & \hbar/2 \\ \hbar/2 & -S_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Итак, мы имеем систему двух линейных однородных уравнений для  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Как известно из курса алгебры, для того чтобы такая система имела ненулевые решения, необходимо, чтобы определители матрицы системы был равен нулю. В данном случае это условие приводит к уравнению:

$$S_x^2 - \frac{\hbar^2}{4} = 0$$

из которого находим собственные значения оператора  $\hat{S}_x$ :

$$S_x = \pm \frac{\hbar}{2} \quad (3)$$

Видно, что проекция спина на ось  $x$  квантуется точно та же, как и проекция спина на ось  $z$ .

Найдем теперь спиноры  $\Psi_{x\uparrow}$  и  $\Psi_{x\downarrow}$ , которые описывают состояния частицы с проекциями спина

$S_x = \hbar/2$  и  $S_x = -\hbar/2$ . Для этого вернемся к матричному уравнению (2). Положим сначала

$S_x = \hbar/2$  и запишем систему уравнений для  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в развернутой форме

$$-\frac{\hbar}{2}\varphi_1 + \frac{\hbar}{2}\varphi_2 = 0, \quad \frac{\hbar}{2}\varphi_1 - \frac{\hbar}{2}\varphi_2 = 0$$

Оба уравнения приводят к соотношению  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Таким образом, спинорная волновая функция состояния частицы с  $S_x = \hbar/2$  может быть записана в виде

$$\Psi_{x\uparrow}(\vec{r}) = \psi_{\uparrow}(\vec{r}) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

где  $\psi_{\uparrow}(\vec{r})$  - произвольная функция координат; она описывает движение частицы в пространстве.

Мы выделим множитель  $1/\sqrt{2}$  в формуле (4), чтобы одновременно выполнялись условия нормировки для спинора  $\Psi_{x\uparrow}$  и координатной части волновой функции

$$\int_V \Psi_{x\uparrow}^\dagger(\vec{r}) \Psi_{x\uparrow}(\vec{r}) dV = 1, \quad \int_V |\psi_{\uparrow}(\vec{r})|^2 dV = 1$$

где интегрирование ведется по области движения частицы.

Спинорная волновая функция  $\Psi_{x\downarrow}$ , которая описывает квантовое состояние частицы с проекцией

спина  $S_x = -\hbar/2$ , находится аналогичным образом. Полагая в матричном уравнении (2)

$S_x = -\hbar/2$ , приходим к соотношению  $\varphi_1 = -\varphi_2$ . Поэтому

$$\Psi_{x\downarrow}(\vec{r}) = \psi_{\downarrow}(\vec{r}) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

где  $\psi_{\downarrow}(\vec{r})$  - произвольная функция координат, нормированная на единицу.

Отметим, что каждая из собственных функция (4) и (5) оператора  $\hat{S}_x$  разбивается на произведение «координатной» волновой функции и «спиновой» волновой функции. Роль спиновых волновых функций играют, с учетом нормировки, спиноры следующего вида

$$\chi_{x\uparrow}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_{x\downarrow}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

С другой стороны, спиноры, которые описывают состояния частицы с проекциями спина  $S_x = \pm \hbar / 2$ , имеют вид:

$$\chi_{z\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{z\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Таким образом используя формулы (6) и (7), можно получить:

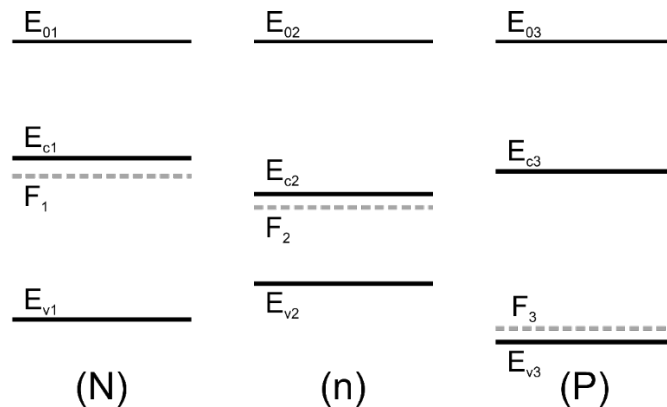
$$\chi_{x\uparrow} = \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{z\uparrow} + \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{z\downarrow}, \quad \chi_{x\downarrow} = \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{z\uparrow} - \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{z\downarrow} \quad (8)$$

Физический смысл этих состояний: каждое из состояний с определенным значением проекции спина  $S_x$  есть суперпозиция состояний с различными значениями проекции  $S_z$ .

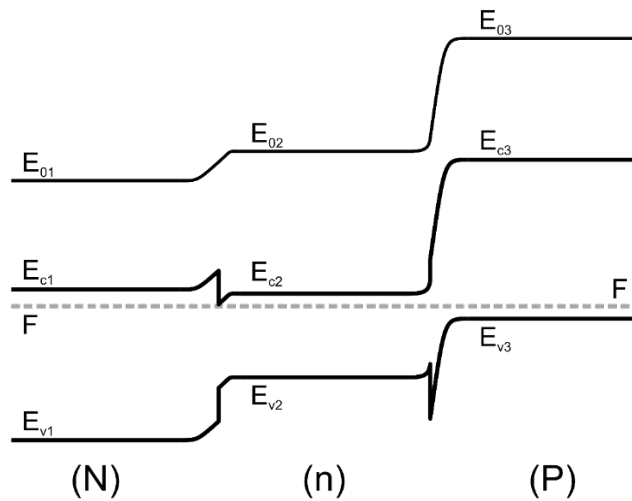
## Б.2.

Изобразить зонную диаграмму в двойной гетероструктуре N – n – P в равновесии и при прямом смещении. Будет ли существовать в такой гетероструктуре эффект электронного ограничения. Ответ обосновать.

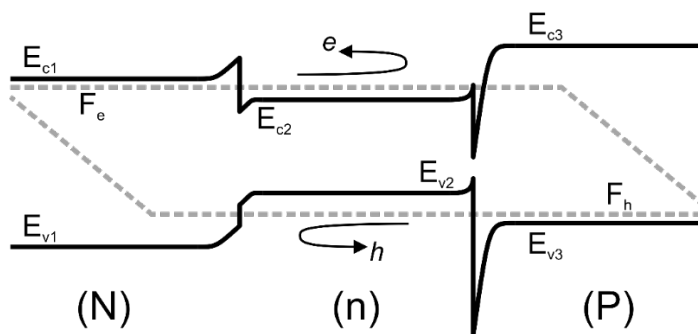
Зонная диаграмма полупроводников до соединения:



Зонная диаграмма полупроводников после соединения:



Зонная диаграмма при прямом смещении:

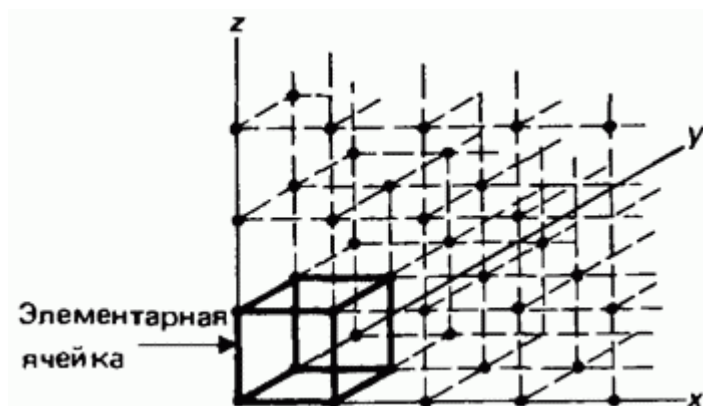


В данной гетероструктуре возможно существование эффекта электронного ограничения.

Происходит возникновение потенциальных барьеров в гетеропереходах при прямом смещении и электроны и дырки «запираются» в узкозонном слое.

### Б.3.

Вычислить долю атомов, лежащих на поверхности кристаллического кластера кубической формы, составленного из  $5 \times 5 \times 5$  элементарных ячеек. Решетка простая кубическая.



В кластере  $5 \times 5 \times 5$  - всего атомов будет:

$$N_{at} = 6 \times 6 \times 6 = 216 \text{ атомов.}$$

Логично, что в объеме будет находиться:

$$4 \times 4 \times 4 \text{ атомов,}$$

Тогда на поверхности:  $N_{\text{нов}} = 216 - 64 = 152$  атома.

Тогда доля поверхностных атомов в кластере:

$$\frac{N_{\text{нов}}}{N_{\text{ам}}} = \frac{152}{216} = 0,71$$

#### Б.4.

Оценить значения температуры  $T$ , при которых необходимо квантовое описание движения атомов в газе  $He^4$ , если концентрация атомов  $n \approx 10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Какой моделью (ферми-газа или бозе-газа) описывается газ  $He^4$ ? В каком случае данную систему можно рассматривать в квазиклассическом приближении.

$$\langle r \rangle \leq \langle \lambda_B \rangle$$

$$n = \frac{N}{V}$$

рассмотрим одну частицу

$$V \sim n^{-1} \Rightarrow$$

$$r^3 \sim n^{-1} \Rightarrow$$

$$r \sim n^{-\frac{1}{3}}$$

с другой стороны

$$p = \hbar k = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}$$

$$\frac{1}{\lambda} \sim \left\langle \frac{h}{p} \right\rangle \sim \left\langle \frac{h}{mv} \right\rangle \sim \left| v \approx \sqrt{\frac{ikT}{m}} \right| \sim \frac{h}{\sqrt{imkT}}$$

$$n^{-1/3} \leq \frac{h}{\sqrt{imkT}}$$

$$\frac{1}{n^{1/3}} \leq \frac{h}{\sqrt{imkT}}$$

$$T \leq \frac{h^2 n^{2/3}}{imk}$$

Для идеального квантового газа соответственно должно выполняться следующее условие:

$$T \leq \frac{h^2 n^{2/3}}{imk}$$

$$T = 1,2 \times 10^{-5} K$$