**2019/2020 учебный год**

**Задания заключительного этапа олимпиады «Я - профессионал»**

**по направлению «Измерительная техника и метрология»**

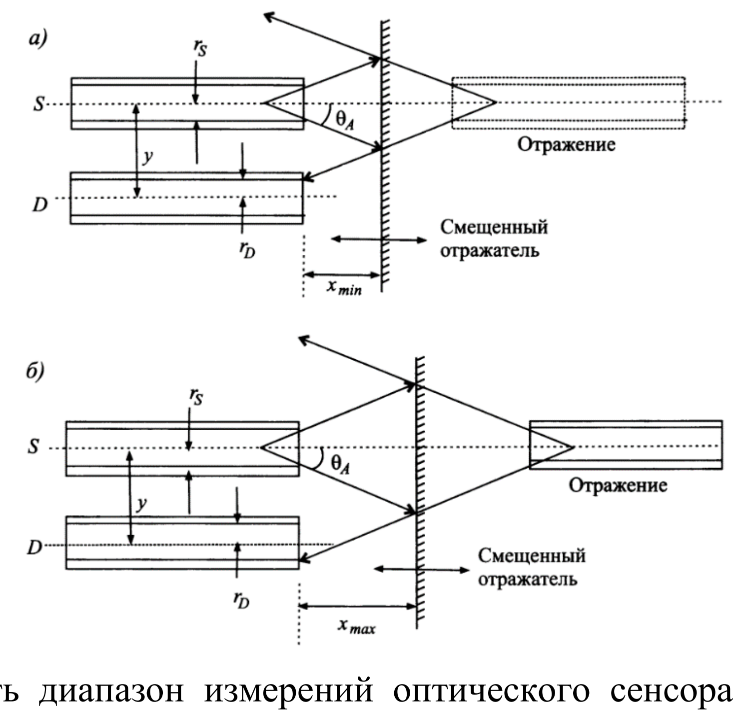
Категория Бакалавриат

## Задание №1

Объясните происхождение численного значения единицы величины Международной морской мили равной 1852 метрам. Какой статус имеет данная единица измерения в Международной системе СИ?

**Ответ:** Это одна угловая минута земного меридиана. Благодаря применению этого значения прокладка курса по меркаторской карте получается очень простой: на сколько продвинулся корабль, на столько угловых минут сместилась на карте точка его местоположения. Международная авиация также использует данную «единицу, временно разрешенную к применению» в системе СИ. Её использование допускается.

## Задание №2




Как определить диапазон измерений оптического сенсора отражательного типа, схема которого приведена на рисунке (S – передающее волокно, D – принимающее волокно). В качестве критерия достижение положения $x_{max}$ принять достижения максимума интенсивности принятого света.

**Ответ:**

$$x_{min} = \frac{y - r_s - r_D}{2 \cdot tg\theta_A}$$

$$x_{max} = \frac{y - r_s + r_D}{2 \cdot tg\theta_A}$$

$$D_{изм} = x_{max} - x_{min}$$

**Задание №3**

Двое близнецов в день своего 25-летия расстались и встретились вновь в день 75-летия со дня их рождения. Один из них после расставания совершил путешествие на ракете со скоростью 0,95 скорости света. Сколько лет исполнилось каждому из близнецов в день их повторной встречи? Принять скорость света равной $c = 299792458\frac{м}{с}$.

Примечание: считать, что разгон и торможение ракеты проходят релятивистски равноускоренно.

**Ответ:** Для путешественника имеет место релятивистское замедление времени.

Тогда

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

где $t_0$ - интервал времени между двумя событиями в системе отсчета, связанной с ракетой, $t$ - интервал времени между двумя событиями в системе отсчета, связанной с Землей, $v$ - скорость движения ракеты.

$$t_0 = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 50\sqrt{1 - \frac{0{,}95c^2}{c^2}} = 15{,}6 \text{ лет}$$

В итоге возраст первого близнеца, находящегося на Земле, составит 75 лет, возраст второго, путешественника, составить 40,6 лет.

Итог: 75 лет, 40,6 лет

## Задание №4

Для определения мощности были проведены измерения силы тока и напряжения. Определите значение абсолютной и относительной погрешности измерения мощности, если: класс точности амперметра 1,5; вольтметра – 0,5; предел измерения амперметра составляет 7,5 А; предел измерения вольтметра – 30 В; результат измерения силы тока равен 2 А; результат измерения напряжения равен 24 В.

**Ответ:** Определим значение измерения мощности:

$$P = U \cdot I = 2 \cdot 24 = 48 \text{ Вт};$$

1) Найдем значение абсолютной погрешности измерения мощности:

$$\Delta P = \pm\sqrt{I^2(\Delta U)^2 + U^2(\Delta I)^2} = \pm 2.656 \text{ Вт};$$

2) Найдем значение относительной погрешности измерения мощности:

$$\delta_P = \pm\sqrt{(\frac{\Delta I}{I})^2 + (\frac{\Delta U}{U})^2} = \pm 0.07 \text{ Вт}$$

## Задание №5

Для определения плотности тела цилиндрической формы были проведены измерения массы $m$, высоты $h$ и диаметра $d$. Определите значения абсолютной и относительной погрешности измерения плотности, если результат измерения массы $m_{изм} = 60$ г; диаметра цилиндра $d_{изм} = 19.083$ мм; высоты цилиндра $h_{изм} = 41.094$ мм. Предел допускаемой погрешности весов равен 15 мг; а предел допускаемой погрешности вертикального длиномера (для измерения параметров $d$ и $h$) представлен зависимостью вида:

$$\Delta = \left(1{,}2 + \frac{L}{120}\right) \text{мкм}.$$

**Ответ:**

1. Определим значение плотности по показаниям прибора по расчетной формуле для плотности через массу тела и его объема:

$$\rho = \frac{4 \cdot m}{\pi \cdot d^2 \cdot h} = \frac{4 \cdot 0.06 \text{ кг}}{\pi \cdot (0{,}019083 \text{ м})^2 \cdot 0{,}041094 \text{ м}} \approx 5105 \text{ кг/м}^3$$

2. Поскольку зависимость плотность от массы, диаметра и высоты определяется конкретной функцией, то можно определить значение абсолютной погрешности измерения:

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial m}\cdot\Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial d}\cdot\Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial h}\cdot\Delta h\right)^2}$$

$$= \frac{4}{\pi}\sqrt{\left(\frac{1}{d^2\cdot h}\right)^2\cdot(\Delta m)^2 + \left(\frac{(-2)m}{h\cdot d^3}\right)^2\cdot(\Delta d)^2 + \left(\frac{(-m)}{d^2\cdot h^2}\right)^2\cdot(\Delta h)^2}$$

Для этого необходимо определить абсолютные погрешности измерения от прямых измерений массы, диаметра и высоты:

$$\Delta m = 0.000015 \text{ кг};$$

$$\Delta d = 1.2 + \frac{d_{\text{изм}}}{120} = 1.36 \text{ мкм};$$

$$\Delta h = 1.2 + \frac{h_{\text{изм}}}{120} = 1.54 \text{ мкм}.$$

Тогда

$$\left(\frac{1}{d^2\cdot h}\right)^2\cdot(\Delta m)^2 = \left(\frac{1}{0{,}019083^2\cdot 0{,}041094}\right)^2\cdot(0{,}000015)^2 = 1.005$$

$$\left(\frac{(-2)m}{h\cdot d^3}\right)^2\cdot(\Delta d)^2 = \left(\frac{(-2)\cdot 0.06}{0{,}019083^3\cdot 0.041094}\right)^2\cdot(1.36\cdot 10^{-6})^2 = 7.947$$

$$\left(\frac{(-m)}{d^2\cdot h^2}\right)^2\cdot(\Delta h)^2 = \left(\frac{-0.06}{0.019083^2\cdot 0.041094^2}\right)^2\cdot(1.54\cdot 10^{-6})^2 = 0.226$$

$$\Delta\rho = \frac{4}{\pi}\sqrt{1.005 + 7.947 + 0.226} = 3.857 \text{ кг/м}^3$$

3. Относительную погрешность измерения найдем из соотношения:

$$\delta\rho = \frac{\Delta\rho}{\rho}\cdot 100\% = \frac{3{,}857}{5105}\cdot 100\% = 0{,}756\ \%.$$

## Задание №6

Оценить на качественном уровне как изменятся ошибки контроля α и β, если распределение вероятностей контролируемой величины будет соответствовать не нормированному нормальному закону $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, а стандартному закону Коши $\frac{1}{\pi(x^2+1)}$. Распределение погрешностей средства контроля подчиняется усеченному нормальному закону с точками усечения $\pm 2\sigma_y$ в обоих случаях. Допуск на размер $T = 6\sigma_x$. Ответ необходимо обосновать.

**Ответ:** Так как ошибки контроля по своей сути являются произведением вероятностей, а именно произведением площадей, то для качественной оценки необходимо лишь оценить как изменятся площади под кривой распределения контролируемой величины на участках [T/2 – δ; T/2] и [T/2; T/2 + δ], поскольку площади под кривой распределения погрешностей на участках [– 2$\sigma_y$; 0] и [0; +2$\sigma_y$] не изменяются. Для распределения Коши площади будут больше, следовательно α и β возрастут.

## Задание №7

Обработайте результаты многократных прямых измерений тока, если они проведены одним и тем же прибором за достаточно малый промежуток времени. Считайте, что полученная совокупность результатов свободна от систематических погрешностей (грубые погрешности исключить) и подчиняется нормальному закону распределения (считать, что доверительная вероятность P = 0.95; уровень значимости q свыше 0,05).

| № измерения | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Результат измерения, мА | 7,07 | 7,18 | 7,19 | 7,32 | 7,21 | 7,09 | 7,25 | 7,67 | 7,22 | 7,15 |

**Ответ:** Из условия задачи следует, что полученная совокупность результатов представляет собой выборку равноточных нормально распределенных данных.

1) Найдем оценку измеряемой величины $\bar{I}$:

$\bar{I} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_i = \frac{72.35}{10} \approx 7.24$ мА

2) Найдем среднее квадратическое отклонение $S$:

$$S_I = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(I_i - \bar{I})^2}{n-1}} = 0.169 \text{ мА}$$

3) В полученной совокупности экспериментальных данных первый результат и восьмой существенно отличаются от остальных. Проверим, содержат ли они грубую погрешность. Определим $G_1$ и $G_2$.

$$G_1 = \frac{|I_8 - \bar{I}|}{S_I} = 2.574\,; G_2 = \frac{|\bar{I} - I_1|}{S_I} = 0.976$$

Сравним значения $G_1$ и $G_2$ с теоретическим $G_T$. Получим, что $G_1 > G_T$, а значит, он содержит грубую погрешность и должен быть исключен. А $G_2 < G_T$ и, следовательно, сохраняется в ряду результатов измерения.

4) Уточним результаты $\overline{I'}$ и $S_I'$:

$$\bar{I}' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_i = \frac{64.68}{9} = 7.149 \text{ мА}$$

$$S_I = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(I_i - \bar{I})^2}{n-1}} = 0.087 \text{ мА}$$

Среди оставшихся значений следует проверить первый и четвертый результат измерения на наличие грубых погрешностей.

$$G_1' = \frac{|I_4 - \bar{I}|}{S_I} = 1.965 \; ; G_2' = \frac{|\bar{I} - I_1|}{S_I} = 0.925$$

Сравним значения G’$_1$ и G’$_2$ с теоретическим G$_T$. Получим, что G’$_1$<G$_T$ и G’$_2$<G$_T$ и, следовательно, сохраняются в ряду результатов измерения.

5) Определим среднее квадратическое отклонение среднего арифметического (оценки измеряемой величины) $S_{\bar{I}}$ :

$$S_{\bar{I}'} = \frac{S_I}{\sqrt{n'}} = \frac{0.087}{3} = 0.029$$

6) Определим границы доверительного интервала.

$$\varepsilon = \pm t \cdot S_{\bar{I}'} = \pm(2.306 \cdot 0.029) = \pm 0.067$$

7) Запишем результат измерения:

$$I_{\text{изм}} = (7.149 \pm 0.067); P = 0.95; n = 9$$

## Задание №8

Предприятие приобрело 250 прутков горячекатаной стали 15ХА диаметром 40 мм. Из случайно отобранных прутков этой партии были получены заготовки (расположение участка прутка для будущей заготовки выбиралось также случайно), из которых изготовили 9 стандартных образцов для испытаний на растяжение. В отчете указаны значения предела прочности, МПа, в виде гистограммы, где $S_\text{т}$ − среднее каждого интервала, $f$ − частота:

| $S_\text{т}$(МПа) | 480,5 | 486,5 | 492,5 | 498,5 |
|---|---|---|---|---|
| $f$ | 2 | 2 | 3 | 2 |

Требуется определить:

а) среднее значение и СКО выборки

б) количество образцов со значением предела прочности менее 482 МПа (распределение нормальное, выборку считать репрезентативной).

**Ответ:** а) Среднее значение равно

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \frac{1}{9}(4408{,}5) = 489{,}83 \text{ МПа}$$

СКО выборки

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(f_i {x_i}^2 - N\bar{x}^2)}{N-1}} = 6{,}78 \text{ МПа.}$$

б) Так как распределение является нормальным (по условию), то для определения количества образцов, соответствующих заданному критерию ($S_т < 482$ МПа) необходимо воспользоваться функцией Лапласа

$$z_{482} = \frac{x - \mu_x}{\hat{\sigma}_x} = \frac{S - \bar{x}}{S_x} = \frac{482 - 489{,}83}{6{,}78} \approx -1{,}15,$$

тогда вероятность того, что предел прочности окажется меньше, чем 482 МПа, может быть выражена как $F(z) = \Phi(z_{482}) = 1 - \Phi(1{,}15)$. По Таблице (Приложение) находим, что $\Phi(z_{482}) = 1 - 0{,}8749 = 0{,}1251$. Таким образом, количество прутков в заданном пределе равно

$$N\Phi(z_{482}) = 250(0{,}1251) = 31{,}28 \approx 31.$$

Итог:

а) $\bar{x} = 489{,}83$ МПа, $S_x$ =6,78 МПа;

б) 31 пруток.

## Задание №9

У пяти предприятий, производящих цифровые блоки разгрузки по частоте и напряжению, был произведён отбор образцов в количестве 6 штук с каждого предприятия. Вся продукция была исследована на надёжность – среднее время безотказной работы. Результаты исследований приведены в таблице.

С помощью дисперсионного анализа ответьте на вопрос, можно ли утверждать, что продукция у всех предприятий одинакового качества? Принимаем, что выборки сделаны из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями. Гипотезу проверить при α = 0,05.

| Номер предприятия | Среднее время безотказной работы, $\times 10^3$ ч | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Номер образца | | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 50 | 46 | 51 | 55 | 38 | 40 |
| 2 | 45 | 60 | 50 | 53 | 55 | 48 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 38 | 42 | 46 | 53 | 55 | 35 |
| 4 | 60 | 65 | 63 | 50 | 55 | 40 |
| 5 | 55 | 65 | 70 | 60 | 68 | 50 |

**Ответ:** Находим групповое среднее значение времени безотказной работы для каждого предприятия:

$$\overline{\mathrm{X}_{\text{ГР}1}} = \frac{50+46+51+55+38+40}{6} = 46{,}7\ \text{тыс. ч};$$

$$\overline{\mathrm{X}_{\text{ГР}2}} = \frac{45+60+50+53+55+48}{6} = 51{,}8\ \text{тыс. ч};$$

$$\overline{\mathrm{X}_{\text{ГР}3}} = \frac{38+42+46+53+55+35}{6} = 44{,}8\ \text{тыс. ч};$$

$$\overline{\mathrm{X}_{\text{ГР}4}} = \frac{60+65+63+50+55+40}{6} = 55{,}5\ \text{тыс. ч};$$

$$\overline{\mathrm{X}_{\text{ГР}5}} = \frac{55+65+70+60+68+50}{6} = 61{,}3\ \text{тыс. ч}.$$

Находим общую среднюю:

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{\overline{\mathrm{X}_{\text{ГР}1}}+\overline{\mathrm{X}_{\text{ГР}2}}+\overline{\mathrm{X}_{\text{ГР}3}}+\overline{\mathrm{X}_{\text{ГР}4}}+\overline{\mathrm{X}_{\text{ГР}5}}}{5} = \frac{46{,}7+51{,}8+44{,}8+55{,}5+61{,}3}{5} = \frac{2601}{5} \cong 52\ \text{тыс. ч}.$$

Вычислим разность $y_{ij} = \overline{\mathrm{X}_{\iota J}} - \overline{\mathrm{X}}$ и квадраты этих разностей, где $y_{ij}$ – время безотказной работы образцов.

| $i = \overline{\overline{(1{,}8)}}$ | Номер предприятия, $j = \overline{\overline{(1{,}5)}}$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | |
| | $y_{i1}$ | ${y_{i1}}^2$ | $y_{i2}$ | ${y_{i2}}^2$ | $y_{i3}$ | ${y_{i3}}^2$ | $y_{i4}$ | ${y_{i4}}^2$ | $y_{i5}$ | ${y_{i5}}^2$ |
| 1 | -2 | 4 | -7 | 49 | -14 | 196 | 8 | 64 | 3 | 9 |
| 2 | -6 | 36 | 8 | 64 | -10 | 100 | 13 | 169 | 13 | 169 |
| 3 | -1 | 1 | -2 | 4 | -6 | 36 | 11 | 121 | 18 | 324 |
| 4 | 3 | 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | -2 | 4 | 8 | 64 |
| 5 | -14 | 196 | 3 | 9 | 3 | 9 | 3 | 9 | 16 | 256 |
| 6 | -12 | 144 | -4 | 16 | -17 | 289 | -12 | 144 | -2 | 4 |
| $\sum$ | | 390 | | 143 | | 631 | | 511 | | 826 |

Найдём общую сумму:

$Q_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{5}(\overline{\mathrm{X}_{\iota J}} - \overline{\mathrm{X}})^2 = 390 + 143 + 631 + 511 + 826 =$ $2501\ \text{тыс. ч}^2$.

Найдём факторную сумму:

$Q_{\text{факт}} = 6 \cdot \sum_{j=1}^{5} (\overline{\mathrm{X}}_{\text{ГР}_j} - \overline{\mathrm{X}})^2 = 6 \cdot [(46{,}7 - 52)^2 + (51{,}8 - 52)^2 + (44{,}8 - 52)^2 + (55{,}5 - 52)^2 + (61{,}3 - 52)^2] = 6 \cdot (28{,}09 + 0{,}04 + 51{,}84 + 12{,}25 + 86{,}49) = 6 \cdot 178{,}71 \cong 1072$ тыс. ч$^2$.

Вычислим остаточную сумму:

$Q_{\text{ост}} = Q_{\text{общ}} - Q_{\text{факт}} = 2501 - 1072 = 1429$ тыс. ч$^2$.

Определим факторную дисперсию:

$S^2_{\text{факт}} = \frac{Q_{\text{факт}}}{5-1} = \frac{1072}{4} = 268$ тыс. ч$^2$.

Определим остаточную дисперсию:

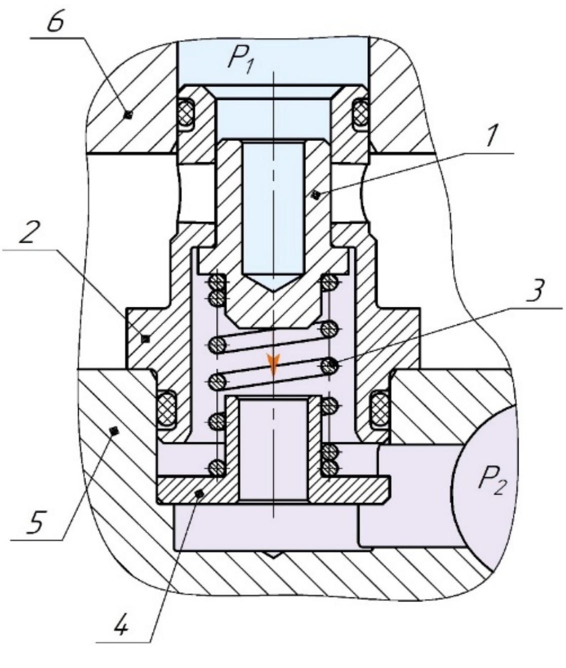
$S^2_{\text{ост}} = \frac{Q_{\text{ост}}}{5(6-1)} = \frac{1429}{25} \cong 57$ тыс. ч$^2$.

Для проверки гипотезы о незначимости фактора предприятия на качество продукции используем критерий Фишера.

Найдём расчётное значение критерия:

$F_{\text{расч}} = \frac{S^2_{\text{факт}}}{S^2_{\text{ост}}} = \frac{268}{57} = 4{,}7.$

По таблице распределения Фишера для уровня значимости α = 0,05 и степеней свободы $k_1 = 5 - 1 = 4$, $k_2 = 5(6-1) = 25$ находим $F_{\text{крит}}(0{,}05; 4; 25) = 2{,}76$.

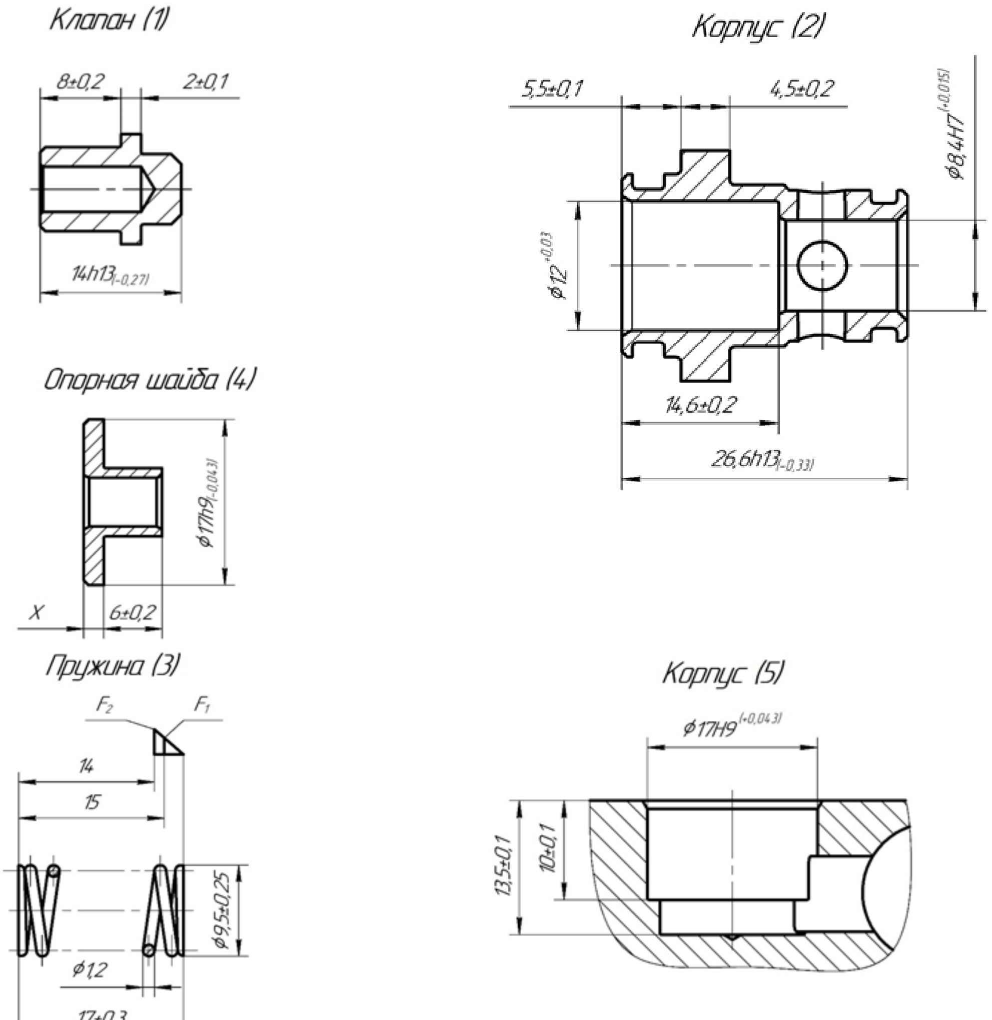



Так как $F_{\text{крит}} = 2{,}76 < F_{\text{расч}} = 4{,}7$, делаем вывод о том, что нельзя утверждать, что продукция у всех предприятий одинакового качества.

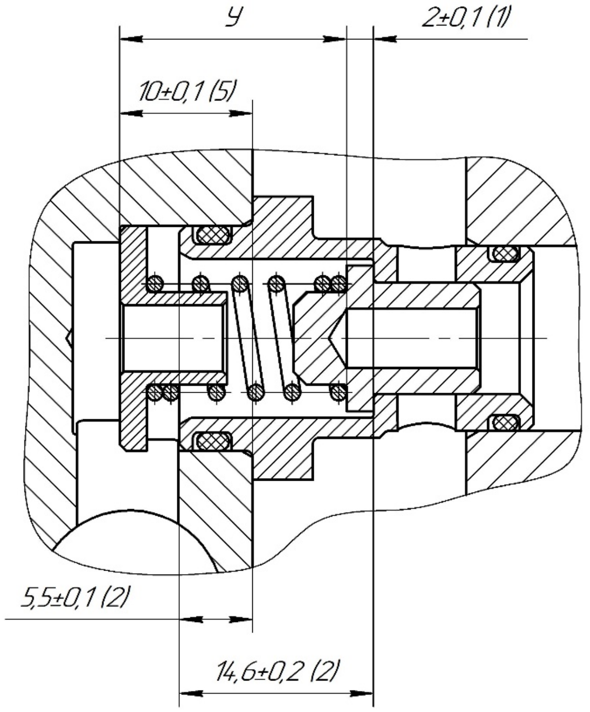
**Задание №10**

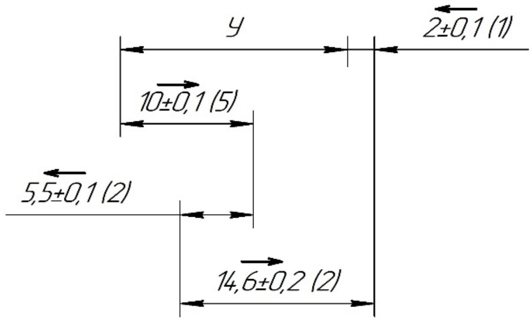
На эскизе изображен дифференциальный клапан. Он состоит из Клапана (1), Корпуса (2), Пружины (3), Опорной шайбы (4) и двух Корпусов (5, 6), между которыми устанавливается Корпус (2) (Корпус (2) притянут винтами к Корпусу (5)). Принцип его действия следующий: при некотором увеличении разности давлений $P_1$ и $P_2$ двух потоков ($P_1 > P_2$) Клапан (1) перемещается в направлении, указанном оранжевой стрелкой (вниз) и поток из верхнего канала начинает заполнять некоторую полость через отверстия в Корпусе (2).

Пружина (3) устанавливается с предварительным поджатием равным 2 мм, чтобы Клапан (1) открывался при строго определенном перепаде давлений. При сборке необходимое поджатие достигается доработкой торца Опорной шайбы (4).
По фрагментам чертежей деталей, входящих в сборку данного дифференциального клапана, необходимо составить размерную цепь и определить требования к точности (максимальный и минимальный размеры) регулирующего звена (обозначен ”X” на фрагменте чертежа Опорной шайбы (4)).
Эскизы деталей на обороте.




**Ответ:** С использованием сборочного эскиза и фрагментов чертежей составим размерную цепь рассматриваемого случая, причем обозначим за искомый не размер регулирующего звена, а сумма искомого размера “X” и длины пружины (3) (размер “У”). На рисунке ниже представлена полученная размерная цепь, в скобках возле каждого размера обозначен номер детали, с чертежа которой он взят.




Определим размеры искомого звена У:

1) Номинальный

$$У_{\Delta} = \sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{A_j} - \sum_{j=1}^{p} \overleftarrow{A_j} = (10 + 14{,}6) - (2 + 5{,}5) = 17{,}1 \text{ мм},$$

где $n$ и $p$ – число соответственно увеличивающих и замыкающих звеньев в размерной цепи;

2) Верхнее значение поля допуска

$$У_{\Delta}{}^{max} = \sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{A_j}^{max} - \sum_{j=1}^{p} \overleftarrow{A_j}^{min} = (0{,}1 + 0{,}2) - (-0{,}1 - 0{,}1) = 0{,}5 \text{ мм}$$

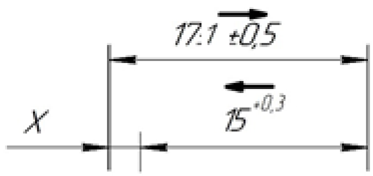
3) Нижнее значение поля допуска

$$У_{\Delta}{}^{min} = \sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{A_j}^{min} - \sum_{j=1}^{p} \overleftarrow{A_j}^{max} = (-0{,}1 - 0{,}2) - (0{,}1 + 0{,}1) = -0{,}5 \text{ мм}$$

Так как сумма полей допусков составляющих размеров равна полю допуска искомого (1 мм = 1 мм), его размеры определены верно.

Размер “У” равен $17{,}1 \pm 0{,}5$ мм.

Теперь рассмотрим составляющие размера “У”. Он составляется как раз из искомого размера “Х” и длины Пружины (3). Длина Пружины по чертежу $17 \pm 0{,}3$ мм, но здесь следует учесть первоначальное поджатие пружины (по условию 2 мм), поэтому пределы размера в сборке являются $17{,}3 - 2 = 15{,}3$ мм и $16{,}7 - 1{,}7 = 15$ мм (так как необходимо приблизиться к номинальной характеристике). Тогда получим следующую размерную цепь, из которой определим размер “Х”:




$$\mathrm{X}_{\Delta} = \sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{A_J} - \sum_{j=1}^{p} \overleftarrow{A_J} = (17{,}1) - (15) = 2{,}1 \text{ мм}$$

$$\mathrm{X}_{\Delta}{}^{max} = \sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{A_J}^{max} - \sum_{j=1}^{p} \overleftarrow{A_J}^{min} = (0{,}5) - (0) = 0{,}5 \text{ мм}$$

$$\mathrm{X}_{\Delta}{}^{min} = \sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{A_J}^{min} - \sum_{j=1}^{p} \overleftarrow{A_J}^{max} = (-0{,}5) - (0{,}3) = -0{,}8 \text{ мм}$$

Так как сумма полей допусков составляющих размеров равна полю допуска искомого (1,3 мм = 1,3 мм), его размеры определены верно. Итого размер $\mathrm{X} = 2.1^{+0{,}5}_{-0{,}8}$ мм.

Итог:

$\mathrm{X} = 2{,}1^{+0{,}5}_{-0{,}8}$ мм