Заключительный этап Всероссийской олимпиады студентов «Я – профессионал»

Направление «Лазерные, плазменные и радиационные технологии»

<u>Теоретический тур</u>

Категория Бакалавриат

Задача 1 (5 баллов)

Узкий пучок протонов с энергией E_0=5 кэВ отражается от поверхности вольфрама под углом α=30° к поверхности с угловым разбросом Δα=5°. Энергетический спектр отраженных частиц не зависит от угла, при этом больше всего отраженных частиц обладают энергией $0.85E_0$. Отраженные протоны заворачиваются в магнитном поле B=0,15 Тл и ударяются об ту же поверхность. Найти ширину пятна от пучка протонов, вернувшихся на поверхность после отражения.

Решение

Радиус Лармора $R = 144\sqrt{W[eV]m[a.e.m]} / H[Э] = 6.25$ см.

Расстояние от места отражения до возврата на поверхность $x = 2R\sin\alpha$.

Поэтому ширина пятна $\Delta x = 2R\left[\sin\left(\alpha+\Delta\alpha\right) - \sin\left(\alpha-\Delta\alpha\right)\right] = 4R\sin\Delta\alpha\cos\alpha = 1.89$ см.

Критерии проверки

1. Верный расчет радиуса заворота иона для хоть какой-то энергии - 2 балла
2. Расчет радиуса и верное определение расстояния от точки отражения до точки падения – 4 балла
3. Верная формулировка, что понимается под пятном и верный расчет его размеров - 5 баллов
   Оценка указана нарастающим итогом

Задача 2 (5 баллов)

Пучок электромагнитного излучения монохроматического источника мощностью P = 1 кВт падает на пластинку под углом 60°. Пластинка пропускает 40% падающей энергии, а остальную зеркально отражает. Найдите величину силы, действующей на пластинку со стороны излучения источника.

Решение

Импульс фотона $p=\frac{h}{\lambda}=\frac{h\nu}{c}$

$F=\frac{dp}{dt}$ - выражение силы через изменения импульса

т.к. 40% излучения проходит насквозь, то только 60% воздействует на пластинку

k=0,6 - коэффициент отражения; N – число фотонов излучения

При нормальном падении при зеркальном отражении импульс меняет свое направление на 180°, т.е по модулю изменяется в 2 раза - должен появиться коэф. 2

Также требуется учесть, что пластинка находится под углом к источнику – должен появиться множитель cosθ (θ=60° - по условию задачи)

$$F=\frac{\Delta p}{t}=\frac{2Npk}{t}$$

$$F=\frac{2Npk\cos\theta}{t}=\frac{2Nkh\nu\cos\theta}{ct}$$

$$\mathrm{F}=\frac{2\cdot 0,6\cdot \mathrm{Nh\nu}\cos 60^0}{\mathrm{ct}}$$

Мощность источника $P=\frac{E}{t}=\frac{Nh\nu}{t}$, где hν – энергия одного фотона

=> $Nh\nu=P$ => $F=\frac{2kP\cos\theta}{c}$

$$\mathrm{F}=\frac{1,2\cdot \mathrm{P}\cdot 0,5}{\mathrm{c}}=\frac{0,6\cdot 10^3\,\mathrm{Вт}}{3\cdot 10^8\,\mathrm{м/с}}=0,2\cdot 10^{-5}\,\mathrm{Н}$$

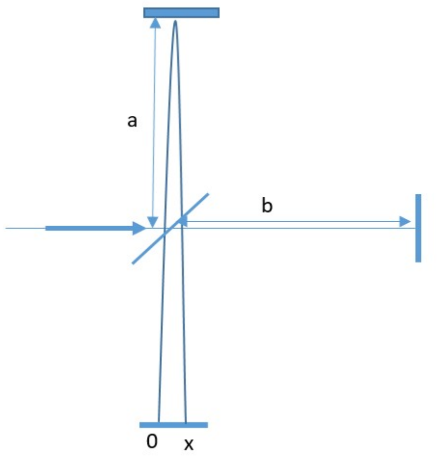
Критерии оценки:

1. Правильно написана формула импульса - 1 балла
2. Правильная постановка задачи (учет коэффициентов) - 2 балла
3. Логика решения задачи правильная, но есть ошибки в выводе - 3 балла
4. Правильно найдено выражение для силы, но не доведено до правильного численного значения - 4 балла
5. Задача решена полностью и доведена до правильного численного ответа - 5 баллов

Задача 3 (10 баллов)

В интерферометр Майкельсона падает излучение с плоским волновым фронтом. Длина волны излучения 500 нм, ширина спектра – 0,01 нм. Считать что спектральная плотность энергии постоянна в пределах спектра излучения. Разность плеч интерферометра составляет 5 мм. Определите видность интерференционных полос.

Решение



Так как плотность энергии постоянная, то функция плотности:

$$g(\omega)=\frac{1}{\Delta\omega}\left[\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2};\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}\right]$$

или

$$g(\omega)=0\left[\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2};\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}\right]$$

Распределение интенсивности в интерференционной картине:

$$J(x)=\int_0^\infty 2J_0(1+\cos\Delta\phi)g(\omega)d\omega \qquad (1)$$

$$\Delta\phi=\frac{2(b-a)}{\lambda}\cdot 2\pi=\frac{2(b-a)}{c}\omega \qquad (2)$$

Обозначим $(b-a)=d$ (3)

Подставим в уравнение (1) формулы (2) и (3)

$$J(x)=\frac{2J_0}{\Delta\omega}\int\limits_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}}\left(1+\cos\frac{2d\omega}{c}\right)d\omega=\frac{2J_0}{\Delta\omega}\left(\omega+\frac{c}{2d}\sin\frac{2d\omega}{c}\right)\Big|_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}}=$$

$$=\frac{2J_0}{\Delta\omega}\left(\Delta\omega+\frac{c}{2d}\left[\sin\frac{2d}{c}\left(\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}\right)-\sin\frac{2d}{c}\left(\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}\right)\right]\right)=$$

¿ $$2J_0\left(1+\frac{c}{\Delta\omega d}\sin\left(\frac{2d}{c}\frac{\Delta\omega}{2}\right)\cos^2\frac{4d\omega_0}{2c}\right)=2J_0\left(1+\frac{c}{\Delta\omega d}\sin\frac{d\Delta\omega}{c}\cos^2\frac{2d\omega_0}{c}\right)$$

При Δω=0, $\frac{\sin\frac{d\Delta\omega}{c}}{\frac{d\Delta\omega}{c}}=1$ - этот коэффициент $V=\frac{\sin\frac{d\Delta\omega}{c}}{\frac{d\Delta\omega}{c}}$ определяет видность интерференционной картины

Так как $\frac{d\Delta\omega}{c}<<1$ разложим $V=\frac{\sin\frac{d\Delta\omega}{c}}{\frac{d\Delta\omega}{c}}$ в ряд

$$V=\frac{c}{d\Delta\omega}\left(\frac{d\Delta\omega}{c}-\frac{d^3\Delta\omega^3}{6c^3}\right)=1-\frac{d^2\Delta\omega^2}{6c^2}$$

Представим ω и Δω через длину волны λ и волновой сдвиг Δλ

$\omega=\frac{2\pi c}{\lambda}$ и $\Delta\omega=2\pi c\left(\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1}\right)=2\pi c\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$

Подставим эти выражения в коэффициент видность интерференционной картины V

$$V=1-\frac{d^2\Delta\omega^2}{6c^2}=1-\frac{d^2 4\pi^2c^2\Delta\lambda^2}{6c^2\lambda^4}=1-\frac{2\pi^2d^2\Delta\lambda^2}{3\lambda^4}$$

Подставим числа

$$V==1-\frac{2\cdot3,14^2\cdot25\cdot10^{12}\cdot10^{-4}}{3\cdot625\cdot10^8}=1-0,26=0,74$$

Критерии оценки:

1. Правильно написано выражение для распределения яркости в интерференционной картине в случае единственной длины волны – 2 балла.
2. Написано интегральное выражение для распределения яркости в интерференционной картине с интегрированием по частотам/длинам волн – 2 балла.

3. Получено правильное выражение для распределения яркости в интерференционной картине в зависимости от ширины спектра источника и разности плеч интерферометра – 3 балла.
4. Получено правильное выражение для видности полос в зависимости от ширины спектра источника и разности плеч интерферометра – 2 балла.
5. Получен правильный численный ответ – 1балл.
6. Оценка за задачу равна сумме оценок по критериям 1-5.
7. При частичной реализации критерия допустимо выставлять не максимальную оценку по данному критерию.

Задача 4 (10 баллов)

Трубчатый электронный пучок радиусом R_1=1 см, пройдя ускоряющую разность потенциалов U=15 кВ между катодом и анодом, распространяется в заземленной проводящей трубе радиусом R_2=2,72 см в вакууме. Потенциалы трубы и анода равны. Оцените ток в пучке I с учетом влияния объемного заряда, если кинетическая энергия электронов W=10 кэВ. Масса электрона 511 кэВ. Труба представляет собой соленоид с однородным магнитным полем. Частицы движутся вдоль силовых линий, т.е. расходимостью пучка можно пренебречь.

Решение

Электронный пучок и заземленную трубу можно рассматривать как цилиндрические коаксиальные поверхности. Под действием объемного заряда между пучком и трубой возникает электрическое поле

$$E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho}{r}$$, ρ- плотность заряда на единицу длины

$$\rho=\frac{I}{v}=\frac{I}{\sqrt{\frac{2W}{m}}}$$

тогда разность потенциалов между пучком и трубой с учетом граничного условия

$$\varphi(r)|_{r=R_2}=0$$

будет

$$\Delta\varphi=2k\rho\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$, где $$k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Из закона сохранения энергии

$$eU = e\cdot\Delta\phi + W$$

$$eU = e\,2\mathrm{k}\,I\sqrt{\frac{m}{2\mathrm{W}}}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + W$$

$$I = \frac{U - W/e}{k\sqrt{\frac{2m}{W}}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Ответ: $I \approx 16.5$ А

Критерии оценки:

1. Правильно найдены выражения для напряженности электрического поля и плотности объемного заряда – 2 балла
2. Правильно найдено выражение для разности потенциалов между пучком и стенкой – 2 балла
3. Правильно связаны ускоряющее напряжение U, разность потенциалов $\Delta\varphi$ и кинетическая энергия в пучке W – 2 балла
4. Правильно найдено выражение для тока в пучке – 2 балла
5. Правильно рассчитано значение *I* – 2 балла
6. Оценка за задачу равна сумме оценок по критериям 1-5
7. При частичной реализации критерия допустимо выставлять не максимальную оценку по данному критерию.

Задача 5 (20 баллов)

Половина Нобелевской премии по физике за 2019г. была присуждена за открытие планет, движущихся в иных звездных системах – экзопланет. Одним из основных методов обнаружения экзопланет является доплеровская спектроскопия. Какой должны быть разрешающая сила спектрографа (измеряемая в $\Delta\upsilon$ ={м/с} или в $\Delta\lambda$ ={см}), чтобы с его помощью можно было обнаружить планету, похожую на Землю у звезды, похожей на Солнце?

Один из самых точных на сегодняшний день детекторов Чилийской обсерватории Ла-Силья позволяет измерять скорости ≥0,97 м/с. Справится ли он с такой задачей? Детектор измеряет смещение линий Тория-232, который присутствует в звездных атмосферах в микроскопических количествах. Почему используется именно Торий, а не водород и гелий, из которых в основном состоят звезды?

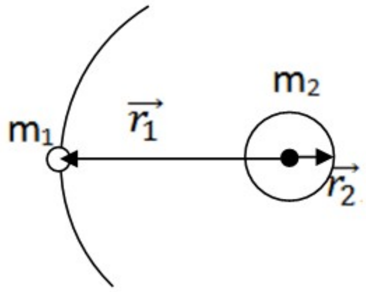
Примечание:

Формулировка «планета, похожая на Землю у звезды, похожей на Солнце» означает, что массы планеты и звезды близки к массам Земли, $M_З=6\cdot10^{24}$ кг, И Солнца $M_с= 2\cdot10^{30}$ кг, соответственно, а расстояние между ними – примерно такое же, как от Земли до Солнца: R_0=150 млн. км

Решение:

Движение планеты вокруг звезды приводит к тому, что она также движется по окружности (эллипсу), но гораздо меньшего размера и с меньшей скоростью, чем планет. Из законов механики следует, что оба тела совершают движение вокруг цента масс системы.

Помещаем начало координат в цент масс, записываем уравнения, позволяющие выразить радиус- вектор планеты, $\vec{r}_1$, массы m_1 и звезды, $\vec{r}_2$, массы m_2 через относительный радиус-вектор $\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$



$$m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2=0 \qquad (1)$$

$$\vec{r}_1-\vec{r}_2=\vec{r} \qquad (2)$$

Отсюда

$$\vec{r}_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}\approx\vec{r} \qquad (3)$$

$$\vec{r}_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}\approx-\frac{m_1}{m_2}\vec{r} \qquad (4)$$

Здесь учтено, что $m_1 \ll m_2$

Из формулы (4) скорость звезды $\vec{\upsilon}_2\approx-\frac{m_1}{m_2}\vec{\upsilon}\approx-\frac{m_1}{m_2}\vec{\upsilon}_1$ (5)

Для планеты , движущейся по окружности радиуса R

Скорость $\upsilon_1=\frac{2\pi R}{T}$, где T- период обращения.

Подставляя параметры Земли, получим $\upsilon_1=\frac{2\pi\cdot150\cdot10^9\,м}{3,15\cdot10^7\,с}\approx30000\,м/с$ (6)

Соответственно, скорость звезды, похожей на Солнце, равна

$$\upsilon_2\approx\frac{m_1}{m_2}\upsilon_1\approx\frac{6\cdot10^{24}}{2\cdot10^{30}}3\cdot10^4\approx0{,}1\,м/с \qquad (7)$$

Такими образом, разрешающую силу доплеровского спектрометра обсерватории Ла-Силья нужно увеличить примерно в 10 раз для того, чтобы с его помощью можно было обнаруживать планеты, похожие на Землю.

Сложность измерений связана с тем, что излучение испускается атомами (ионами) звездной плазмы, находящейся при температуре в несколько тысяч градусов. Это приводи к сильному тепловому уширению линий, которые можно оценить по формуле

$$\Delta\lambda = \lambda \frac{\Delta\upsilon}{c}, \qquad (8)$$

где $\Delta\upsilon \approx \sqrt{\frac{3kT}{M}}$

Для Тория с М=232 тепловое уширение будет примерно в 15 раз меньше, чем для водорода

Критерии проверки

1. Понято и обосновано, что обнаружение планет у звезд происходит по доплеровской спектроскопии сдвига линий излучения звезды, связанного с ее вращением относительно центра масс системы «звезда-планета» - 4 балла

2. Использование закона всемирного тяготения (или известных астрономических данных по продолжительности года) для нахождения параметров орбиты планеты и звезды – 4 балла

3. Правильно найдена скорость звезды – 6 баллов

4. Вывод о необходимости десятикратного увеличения чувствительности доплеровского спектрометра обсерватории Ла-Силья для регистрации планеты, похожей на Землю, у звезды, похожей на Солнце – 2 балла

5. Понято, что основная сложность измерение доплеровского сдвига линий, небольшая величина сдвига по сравнению с их тепловым уширением – 2 балла

6. Оценка тепловой скорости атомов и вывод, что чем больше масса соответствующего атома, тем меньше тепловое уширение линий его излучения. – 2 балла.

7. Оценка за задачу равна сумме оценок по критериям 1-6.

8. При частичной реализации критерия допустимо выставлять не максимальную оценку по данному критерию.

Задача 6 (20 баллов)

Мощный лазерный импульс падает нормально на тонкую плазменную пленку массы $M = 10^{-12}$г, ускоряя ее силой светового давления. Взаимодействие продолжается в течение промежутка времени τ =1пс (1пс=10^{-12}с). После отражения лазерного импульса скорость плазмы составила V = 0.9 от скорости света $c = 3 \cdot 10^{10}$см/с. Считая, что лазерное излучение отражается от движущейся плазмы, как от идеального зеркала, оценить мощность (в Ваттах) лазерного излучения, необходимую для разгона плазмы до такой скорости.

Решение: 1. В системе отсчета, связанной с плазмой (собственная система отсчета – ССО) уравнение движения имеет вид

$$Mw_0 = \frac{2P_0}{c} \ , \qquad (1)$$

где ω_0 – ускорение плазменного зеркала в ССО, а P_0 – мощность излучения там же. При переходе в лабораторную систему отсчета (ЛСО) эти величины преобразуются следующим образом

$$P = P_0 \frac{1 + V/c}{1 - V/c} \ , \quad w = w_0 (1 - V^2/c^2)^{3/2} \ . \qquad (2)$$

Решая уравнения (1), (2), получим зависимость скорости зеркала от времени в виде:

$$\frac{2 + \beta - \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}(1 - \beta)} - 2 = \frac{6Pt}{Mc^2} \ , \quad \beta = \frac{V}{c}. \qquad (3)$$

Подставляя сюда β=0.9, найдем

$$\frac{6P\tau}{Mc^2} \approx 46 \ , \quad \to \quad P \approx 0.75 \text{ПВт} \ . \qquad (4)$$

Критерии оценки:

1. Получено верное выражение для уравнения движения с учётом идеальности зеркала – 5 баллов
2. Верно осуществлён переход в лабораторную систему с учётом релятивизма – 7 баллов
3. Правильно найдено выражение мощности лазерного излучения – 5 баллов

4. Правильно рассчитано значение Р – 3 балла
5. Оценка за задачу равна сумме оценок по критериям 1-4
6. При частичной реализации критерия допустимо выставлять не максимальную оценку по данному критерию.