БИЛЕТ 1

1. **(2 балла)** Найдите остаток от деления многочлена $x^{1000} + x^{999}$ на многочлен $x^3 + 2x$.

   Ответ: $R(x) = -2^{499}\left(x^2 + x\right)$.

   Решение. Поскольку делитель является многочленом третьей степени, остаток имеет степень не выше второй, и он может быть представлен в виде $R(x) = ax^2 + bx + c$. Выполняя деление, получаем

$$x^{1000} + x^{999} = Q(x)\left(x^3 + 2x\right) + R(x), \tag{1}$$

   где $Q(x)$ – некий многочлен (частное от деления). Многочлен $x^3 + 2x$ имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}i$, $x_3 = -\sqrt{2}i$. Подставляя в равенство (1) вместо x числа 0 и $i\sqrt{2}$, получаем уравнения $0 = Q(0) \cdot 0 + c$ и $2^{500} - 2^{499}\sqrt{2}i = Q\left(i\sqrt{2}\right) \cdot 0 - 2a + b\sqrt{2}i + c$. Из первого равенства следует, что $c = 0$, а во втором можем приравнять действительную и мнимую части: $2^{500} = -2a$, $-2^{499}\sqrt{2} = b\sqrt{2}$. Значит, $a = b = -2^{499}$. Поэтому остаток $R(x) = -2^{499}\left(x^2 + x\right)$.

2. **(2 балла)** Пусть L – линейное пространство кососимметрических матриц $\left(A^T = -A\right)$ размера 7×7 со стандартными операциями сложения и умножения на число. Существует ли линейное преобразование φ пространства L такое, что $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi$?

   Ответ: не существует.

   Решение. Отметим, что $\dim L = 21$ (кососимметрическая матрица однозначно задаётся элементами, стоящими ниже главной диагонали; на самой главной диагонали расположены нули). Известно, что $\dim L = \dim\operatorname{Im}\varphi + \dim\operatorname{Ker}\varphi$. Предположим, что нашлось такое φ, что $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi$. Но тогда $\dim\operatorname{Im}\varphi = \dim\operatorname{Ker}\varphi = 10{,}5$. Противоречие.

3. **(2 балла)** Пусть y_1 и y_2 – различные решения уравнения $y''' + 4y'' + 4y' = e^{\sin 2x}$. Обязан ли существовать предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(y_2(x) - y_1(x))$?

   Ответ: обязан.

   Решение. Разность частных решений неоднородного уравнения – это решение соответствующего однородного уравнения. В нашем случае характеристическое уравнение есть $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda = 0$. Его корнями являются числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -2$. Поэтому любое решение однородного уравнения представимо в виде $y_0 = C_1 + (C_2 + C_3x)\,e^{-2x}$, где C_1, C_2, C_3 – некоторые постоянные. Следовательно, предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(C_1 + (C_2 + C_3x)\,e^{-2x}\right) = C_1$.

4. **(2 балла)** Определите радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^{2n}}x^n$, где a_n – количество полных квадратов, не превосходящих числа n^{2020}.

   Ответ: 9.

   Решение. Верна оценка $1 \leqslant a_n \leqslant n^{2020}$ (оценка сверху получается из очевидного вывода, что a_n не превосходит количества всех чисел от 1 до n^{2020}). Тогда $\frac{1}{9} \leqslant \sqrt[n]{\frac{a_n}{3^{2n}}} \leqslant \frac{(\sqrt[n]{n})^{2020}}{9}$. Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$, заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n}{3^{2n}}} = \frac{1}{9}$. Следовательно, по формуле Коши–Адамара $R = 9$.

   Замечание. На самом деле, значение a_n равно n^{1010}.

5. **(3 балла)** Независимые случайные величины ξ и η равномерно распределены на отрезках $[0;3]$ и $[4;6]$ соответственно. Найдите плотность распределения случайной величины $\Gamma = \xi - 2\eta$.

   Ответ: $f_\Gamma(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -12; \\ \frac{1}{12}(x+12), & -12 < x \leqslant -9; \\ \frac{1}{4}, & -9 < x \leqslant -8; \\ -\frac{1}{12}(x+5), & -8 < x \leqslant -5; \\ 0, & x > -5. \end{cases}$

Решение. Случайный вектор $(\xi;\eta)$ равномерно распределён на прямоугольнике $[0;3]\times[4;6]$. Следовательно, вероятность $P\{\Gamma<x\}$ равна отношению площади фигуры, полученной пересечением этого прямоугольника и полуплоскости $x_1-2x_2<x$, к площади всего прямоугольника. Получаем

$$F_\Gamma(x)=P\{\Gamma<x\}=\begin{cases}0, & x\leqslant -12;\\ \frac{(x+12)^2}{24}, & -12<x\leqslant -9;\\ \frac{2x+21}{8}, & -9<x\leqslant -8;\\ 1-\frac{(x+5)^2}{24}, & -8<x\leqslant -5;\\ 1, & x>-5.\end{cases}$$

Дифференцируя функцию распределения $F_\Gamma(x)$, находим требуемую плотность распределения:

$$f_\Gamma(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -12;\\ \frac{1}{12}(x+12), & -12<x\leqslant -9;\\ \frac{1}{4}, & -9<x\leqslant -8;\\ -\frac{1}{12}(x+5), & -8<x\leqslant -5;\\ 0, & x>-5.\end{cases}$$

6. **(2 балла)** На каждой из сторон треугольника отмечено по 9 точек (при этом все отмеченные точки различны, и ни одна из них не является вершиной треугольника). Из 27 отмеченных точек наугад выбираются четыре. Найдите вероятность того, что эти четыре точки являются вершинами некоторого четырёхугольника.

Ответ: $\frac{18}{25}$.

Решение. Общее количество способов выбрать 4 точки из имеющихся равно $C_{27}^4=\frac{27\cdot26\cdot25\cdot24}{4!}=27\cdot26\cdot25=17\,550$. Из выбранных точек было возможно образовать четырёхугольник в следующих случаях: (а) две точки лежат на одной стороне треугольника, а две на другой или (б) две точки лежат на одной стороне треугольника, а на двух оставшихся лежит по одной точке. В случае (а) есть $C_3^2\cdot C_9^2\cdot C_9^2=3\cdot36\cdot36=3\,888$ способов (сначала выбираем две стороны из трёх, на которых лежат точки, а затем на каждой стороне выбираем по две точки из девяти); в случае (б) количество способов равно $C_3^2\cdot C_9^2\cdot C_9^1\cdot C_9^1=3\cdot36\cdot9\cdot9=8\,748$ (выбираем две стороны, на которых лежит по одной точке, затем выбираем по одной точке из девяти на этих сторонах; наконец, выбираем две точки на оставшейся стороне). Значит, искомая вероятность есть $\frac{3\,888+8\,748}{17\,550}=\frac{12\,636}{17\,550}=\frac{18}{25}$.

7. **(3 балла)** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x;y)=e^{2x^2+y^2}$ на множестве

$$S=\left\{(x;y)\,\middle|\,\sqrt{x}+\sqrt{2y}=3\right\}.$$

Ответ: $\max\limits_S f=f(9;0)=e^{162}$; $\min\limits_S f=f(1;2)=e^6$.

Решение. Множество S является замкнутым (как линия уровня непрерывной функции $g(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{2y}$) и ограниченным ($S$ лежит в прямоугольнике $[0;9]\times\left[0;\frac{9}{2}\right]$). Поэтому по теореме Вейерштрасса $\min\limits_S f$ и $\max\limits_S f$ существуют.

При $x>0$, $y>0$ функции f и g непрерывно дифференцируемы и градиент $\nabla g\neq0$. Поэтому, если экстремальное значение принимается в точке S с положительными координатами, то эта точка по необходимому условию условного экстремума является стационарной точкой функции Лагранжа $L=f(x;y)-\lambda g(x;y)$. Система

$$\begin{cases}L'_x=4xe^{2x^2+y^2}-\frac{\lambda}{2\sqrt{x}}=0,\\ L'_y=2ye^{2x^2+y^2}-\frac{\lambda}{\sqrt{2y}}=0,\\ \sqrt{x}+\sqrt{2y}=3,\end{cases}$$

имеет единственное решение $(1;2)$ (при $\lambda=8e^6$). Сравнивая значения f в стационарной точке $(1;2)$ и концевых точках $(9;0)$ и $\left(0;\frac{9}{2}\right)$, получаем, что $\max\limits_S f=f(9;0)=e^{162}$ и $\min\limits_S f=f(1;2)=e^6$.

8. **(3 балла)** Дана непрерывная на отрезке $[0;3]$ функция f такая, что $\int\limits_0^3 f^2(x)\,dx = 27$ и $\int\limits_0^3 f(x)(x-1)\,dx = 9$. Найдите $\min\limits_{x\in[0;3]}\big(x^2-2f(x)\big)$.

Ответ: -3.

Решение. Обозначим $g(x)=x-1$. Функции $f(x)$ и $g(x)$ являются элементами Евклидова пространства[1] $CL_2[0;3]$. При этом $\|g\|^2=(g,g)=\int\limits_0^3 g^2(x)\,dx=3$. По условию задачи имеем, что $\|f\|^2=27$, $(f,g)=9$. Получается, что $(f,g)=9=\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}=\|f\|\cdot\|g\|$, а такое возможно тогда и только тогда, когда $f(x)$ и $g(x)$ являются линейно зависимыми функциями[2] на $[0;3]$.

Пусть $f(x)=k\cdot g(x)$; тогда $(f,g)=k\cdot(g,g)=k\cdot 3=9$, откуда следует, что $k=3$ и $f(x)=3x-3$. Итак, $\min\limits_{[0;3]}\big(x^2-2f(x)\big)=\min\limits_{[0;3]}\big(x^2-6x+6\big)=\min\limits_{[0;3]}\big((x-3)^2-3\big)=-3$.

9. **(3 балла)** В пространстве расположены прямые

$$\ell_1:\ \frac{2-x}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1},\quad \ell_2:\ \frac{7-x}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{1},\quad \ell_3:\ \frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{1}.$$

На прямой ℓ_1 выбрана точка A, на ℓ_2 – точка B, на ℓ_3 – точка C. Найдите наименьшую возможную площадь треугольника ABC. Система координат декартова прямоугольная (базис ортонормированный).

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Решение. Заметим, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны (они имеют один и тот же направляющий вектор $\mathbf{a}(-1;1;1)$). Проведем через ℓ_1 и ℓ_2 плоскость (назовём её α) и найдем её уравнение. На прямой ℓ_1 лежит точка $M(1;0;1)$, на прямой ℓ_2 – точка $N(6;4;2)$, а вектор $\mathbf{a}$ параллелен α. Отсюда вектор нормали к плоскости равен

$$\mathbf{a}\times\overrightarrow{MN}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -1 & 1 & 1\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}=-3\mathbf{i}+6\mathbf{j}-9\mathbf{k}=-3\mathbf{n},$$

где $\mathbf{n}(1;-2;3)$. Тогда уравнение плоскости α – это $x-2y+3z-4=0$.

Направляющий вектор прямой ℓ_3 есть $\mathbf{b}(5;4;1)$. Он параллелен α, так как $(\mathbf{b},\mathbf{n})=0$, то есть прямая ℓ_3 параллельна α. Поэтому площадь треугольника ABC не меньше половины произведения расстояния d_1 между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 и расстояния d_2 от прямой ℓ_3 до плоскости α. Заметим теперь, что прямая ℓ_3 перпендикулярна прямым ℓ_1 и ℓ_2. Выберем произвольную точку на ℓ_3 (например, $C(0;0;0)$). Проведём плоскость β через точку C перпендикулярно ℓ_1. Обозначим точки пересечения β с ℓ_1 и ℓ_2 как A и B соответственно. Тогда площадь полученного треугольника ABC равна $\frac{1}{2}d_1d_2$, поскольку длина AB равна расстоянию между прямыми ℓ_1 и ℓ_2, а высота треугольника, проведённая к AB, равна расстоянию от прямой ℓ_3 до плоскости α. Расстояние d_1 легко найти: вектор $\overrightarrow{MN}=(5;4;1)$ перпендикулярен вектору $\mathbf{a}(-1;1;1)$, поэтому $AB=MN=\sqrt{42}$. Расстояние d_2 равно расстоянию от точки C до плоскости α и равно $\frac{4}{\sqrt{14}}$. Поэтому искомая площадь равна $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{42}\cdot\frac{4}{\sqrt{14}}=2\sqrt{3}$.

10. **(3 балла)** Линейное преобразование φ в некотором ортонормированном базисе задается вещественной симметрической матрицей A порядка 3. Известно, что след матрицы A равен 6; $\mathbf{a}_1(2;-1;1)$ и $\mathbf{a}_2(1;3;1)$ – собственные векторы φ, отвечающие собственным значениям 1 и 2 соответственно. Выясните, существует ли собственный вектор $\mathbf{a}_3$, образующий вместе с векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно независимую систему, и имеющий координаты $(4;x;y)$. В случае утвердительного ответа найдите оставшиеся координаты вектора $\mathbf{a}_3$ и соответствующее ему собственное значение (все координаты рассматриваются в исходном ортонормированном базисе).

---

[1] Пространство непрерывных функций со скалярным произведением $(f,g)=\int\limits_0^3 f(x)g(x)\,dx$ и нормой, равной $\|f\|=\sqrt{(f,f)}=\sqrt{\int\limits_0^3 f^2(x)\,dx}$.

[2] Согласно неравенству Коши–Шварца, $\big|(f,g)\big|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|$, причём равенство достигается, если и только если f и g линейно зависимы.

Ответ: $\mathbf{a}_3(4;1;-7)$; $\lambda_3 = 3$.

Решение. Так как матрица A симметрическая и базис ортонормированный, то преобразование φ является самосопряженным. Известно, что такие преобразования диагонализируемы. В силу инвариантности $\mathrm{tr}A$ равен сумме всех собственных значений преобразования φ. Отсюда находим оставшееся собственное значение: $\lambda_3 = 6 - 1 - 2 = 3$. Поскольку собственные значения оказались различными, все собственные подпространства одномерны. Собственные векторы самосопряженного преобразования, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны. Поэтому любой собственный вектор, линейно независимый с $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, пропорционален векторному произведению $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = (-4;-1;7)$. Таким образом, вектор $\mathbf{a}_3$ существует, $\mathbf{a}_3(4;1;-7)$. Он отвечает значению $\lambda_3 = 3$.

БИЛЕТ 2

1. **(2 балла)** Найдите остаток от деления многочлена $x^{1001} + x^{996}$ на многочлен $x^3 + 3x$.

   Ответ: $R(x) = -3^{497}x^2 + 3^{500}x$.

   Решение. Поскольку делитель является многочленом третьей степени, остаток имеет степень не выше второй, и он может быть представлен в виде $R(x) = ax^2 + bx + c$. Выполняя деление, получаем

$$x^{1001} + x^{996} = Q(x)\left(x^3 + 3x\right) + R(x), \tag{2}$$

   где $Q(x)$ – некий многочлен (частное от деления). Многочлен $x^3 + 3x$ имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}i$, $x_3 = -\sqrt{3}i$. Подставляя в равенство (2) вместо x числа 0 и $i\sqrt{3}$, получаем уравнения $0 = Q(0) \cdot 0 + c$ и $3^{500}\sqrt{3}i + 3^{498} = Q\left(\sqrt{3}i\right) \cdot 0 - 3a + b\sqrt{3}i + c$. Из первого равенства следует, что $c = 0$, а во втором можем приравнять действительную и мнимую части: $3^{498} = -3a$, $3^{500}\sqrt{3} = b\sqrt{3}$. Значит, $a = -3^{497}$, $b = 3^{500}$. Поэтому остаток $R(x) = -3^{497}x^2 + 3^{500}x$.

2. **(2 балла)** Пусть L – линейное пространство кососимметрических матриц $\left(A^T = -A\right)$ размера 6×6 со стандартными операциями сложения и умножения на число. Существует ли линейное преобразование φ пространства L такое, что $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\varphi$?

   Ответ: не существует.

   Решение. Отметим, что $\dim L = 15$ (кососимметрическая матрица однозначно задаётся элементами, стоящими ниже главной диагонали; на самой главной диагонали расположены нули). Известно, что $\dim L = \dim \mathrm{Im}\,\varphi + \dim \mathrm{Ker}\,\varphi$. Предположим, что нашлось такое φ, что $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\varphi$. Но тогда $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim \mathrm{Ker}\,\varphi = 7{,}5$. Противоречие.

3. **(2 балла)** Пусть y_1 и y_2 – различные решения уравнения $y''' - 4y'' + 4y' = e^{\cos 2x}$. Обязан ли существовать предел $\lim\limits_{x\to-\infty}(y_2(x) - y_1(x))$?

   Ответ: обязан.

   Решение. Разность частных решений неоднородного уравнения – это решение соответствующего однородного уравнения. В нашем случае характеристическое уравнение есть $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0$. Его корнями являются числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -2$. Поэтому любое решение однородного уравнения представимо в виде $y_0 = C_1 + (C_2 + C_3x)\,e^{2x}$, где C_1, C_2, C_3 – некоторые постоянные. Следовательно, предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(C_1 + (C_2 + C_3x)\,e^{2x}\right) = C_1$.

4. **(2 балла)** Определите радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{2n}a_nx^n$, где a_n – количество простых делителей числа n^{2020}.

   Ответ: $\frac{1}{4}$.

   Решение. Верна оценка $1 \leqslant a_n \leqslant n^{2020}$ (оценка сверху получается из очевидного вывода, что a_n не превосходит количества всех чисел от 1 до n^{2020}). Тогда $4 \leqslant \sqrt[n]{2^{2n}a_n} \leqslant 4(\sqrt[n]{n})^{2020}$. Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$, заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{2n}a_n} = 4$. Следовательно, по формуле Коши–Адамара $R = \frac{1}{4}$.

5. **(3 балла)** Независимые случайные величины ξ и η равномерно распределены на отрезках $[1;2]$ и $[3;6]$ соответственно. Найдите плотность распределения случайной величины $\Gamma = 2\xi + \eta$.

Ответ: $f_\Gamma(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 5; \\ \frac{1}{6}(x-5), & 5 < x \leqslant 7; \\ \frac{1}{3}, & 7 < x \leqslant 8; \\ -\frac{1}{6}(x-10), & 8 < x \leqslant 10; \\ 0, & x > 10. \end{cases}$

Решение. Случайный вектор $(\xi;\eta)$ равномерно распределён на прямоугольнике $[1;2] \times [3;6]$. Следовательно, вероятность $P\{\Gamma < x\}$ равна отношению площади фигуры, полученной пересечением этого прямоугольника и полуплоскости $2x_1 + x_2 < x$, к площади всего прямоугольника. Получаем

$$F_\Gamma(x) = P\{\Gamma < x\} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 5; \\ \frac{(x-5)^2}{12}, & 5 < x \leqslant 7; \\ \frac{x-6}{3}, & 7 < x \leqslant 8; \\ 1 - \frac{(x-10)^2}{12}, & 8 < x \leqslant 10; \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

Дифференцируя функцию распределения $F_\Gamma(x)$, находим требуемую плотность распределения:

$$f_\Gamma(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 5; \\ \frac{1}{6}(x-5), & 5 < x \leqslant 7; \\ \frac{1}{3}, & 7 < x \leqslant 8; \\ -\frac{1}{6}(x-10), & 8 < x \leqslant 10; \\ 0, & x > 10. \end{cases}$$

6. **(2 балла)** На каждой из сторон треугольника отмечено по 10 точек (при этом все отмеченные точки различны, и ни одна из них не является вершиной треугольника). Из 30 отмеченных точек наугад выбираются четыре. Найдите вероятность того, что эти четыре точки являются вершинами некоторого четырёхугольника.

Ответ: $\frac{5}{7}$.

Решение. Общее количество способов выбрать 4 точки из имеющихся равно $C_{27}^4 = \frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}{4!} = 27\,405$. Из выбранных точек было возможно образовать четырёхугольник в следующих случаях: (а) две точки лежат на одной стороне треугольника, а две на другой или (б) две точки лежат на одной стороне треугольника, а на двух оставшихся лежит по одной точке. В случае (а) есть $C_3^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_{10}^2 = 3 \cdot 45 \cdot 45 = 6\,075$ способов (сначала выбираем две стороны из трёх, на которых лежат точки, а затем на каждой стороне выбираем по две точки из десяти); в случае (б) количество способов равно $C_3^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 = 3 \cdot 45 \cdot 10 \cdot 10 = 13\,500$ (выбираем две стороны, на которых лежит по одной точке, затем выбираем по одной точке из десяти на этих сторонах; наконец, выбираем две точки на оставшейся стороне). Значит, искомая вероятность есть $\frac{6\,075+13\,500}{17\,550} = \frac{19\,575}{27\,405} = \frac{5}{7}$.

7. **(3 балла)** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x;y) = 1 - x^2 - 2y^2$ на множестве

$$S = \left\{ (x;y) \,\middle|\, \sqrt{2x} + \sqrt{y} = 3 \right\}.$$

Ответ: $\min\limits_S f = f(0;9) = -161$; $\max\limits_S f = f(2;1) = -5$.

Решение. Множество S является замкнутым (как линия уровня непрерывной функции $g(x,y) = \sqrt{2x} + \sqrt{y}$) и ограниченным ($S$ лежит в прямоугольнике $\left[0;\frac{9}{2}\right] \times [0;9]$). Поэтому по теореме Вейерштрасса $\min\limits_S f$ и $\max\limits_S f$ существуют.

При $x > 0$, $y > 0$ функции f и g непрерывно дифференцируемы и градиент $\nabla g \neq 0$. Поэтому, если экстремальное значение принимается в точке S с положительными координатами, то эта точка по

необходимому условию условного экстремума является стационарной точкой функции Лагранжа $L = f(x;y) - \lambda g(x;y)$. Система

$$\begin{cases} L'_x = -2x - \frac{\lambda}{\sqrt{2x}} = 0, \\ L'_y = -4y - \frac{\lambda}{2\sqrt{y}} = 0, \\ \sqrt{2x} + \sqrt{y} = 3, \end{cases}$$

имеет единственное решение $(2;1)$ (при $\lambda = -8$). Сравнивая значения f в стационарной точке $(2;1)$ и концевых точках $\left(\frac{9}{2};0\right)$ и $(0;9)$, получаем, что $\min\limits_S f = f(0;9) = -161$ и $\max\limits_S f = f(2;1) = -5$.

8. **(3 балла)** Дана непрерывная на отрезке $[-1;2]$ функция f такая, что $\int\limits_{-1}^{2} f^2(x)\,dx = 4$ и $\int\limits_{-1}^{2} f(x)(x+1)\,dx = 6$. Найдите $\max\limits_{x\in[-1;2]} \left(3f(x) - x^2\right)$.

Ответ: 3.

Решение. Обозначим $g(x) = x+1$. Функции $f(x)$ и $g(x)$ являются элементами Евклидова пространства[3] $CL_2[-1;2]$. При этом $\|g\|^2 = (g,g) = \int\limits_{-1}^{2} g^2(x)\,dx = 9$. По условию задачи имеем, что $\|f\|^2 = 4$, $(f,g) = 6$. Получается, что $(f,g) = 6 = 2\cdot 3 = \|f\|\cdot\|g\|$, а такое возможно тогда и только тогда, когда $f(x)$ и $g(x)$ являются линейно зависимыми функциями[4] на $[-1;2]$.

Пусть $f(x) = k\cdot g(x)$; тогда $(f,g) = k\cdot(g,g) = k\cdot 9 = 6$, откуда следует, что $k = \frac{2}{3}$ и $f(x) = \frac{2}{3}(x+1)$. Итак, $\max\limits_{[-1;2]} \left(3f(x) - x^2\right) = \max\limits_{[-1;2]} \left(2x + 2 - x^2\right) = \max\limits_{[-1;2]} \left(3 - (x-1)^2\right) = 3$.

9. **(3 балла)** В пространстве расположены прямые

$$\ell_1:\ \frac{x-1}{3} = \frac{1-y}{1} = \frac{z-5}{1}, \quad \ell_2:\ \frac{x}{3} = \frac{5-y}{1} = \frac{z-12}{1}, \quad \ell_3:\ \frac{x}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{7}.$$

На прямой ℓ_1 выбрана точка A, на ℓ_2 – точка B, на ℓ_3 – точка C. Найдите наименьшую возможную площадь треугольника ABC. Система координат декартова прямоугольная (базис ортонормированный).

Ответ: $\sqrt{11}$.

Решение. Заметим, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны (они имеют один и тот же направляющий вектор $\mathbf{a}(3;-1;1)$). Проведем через ℓ_1 и ℓ_2 плоскость (назовём её α) и найдем её уравнение. На прямой ℓ_1 лежит точка $M(1;1;5)$, на прямой ℓ_2 – точка $N(0;5;12)$, а вектор $\mathbf{a}$ параллелен α. Отсюда вектор нормали к плоскости равен

$$\mathbf{a}\times\overrightarrow{MN} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -11\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 11\mathbf{k} = -11\mathbf{n},$$

где $\mathbf{n}(1;2;-1)$. Тогда уравнение плоскости α – это $x + 2y - z + 2 = 0$.

Направляющий вектор прямой ℓ_3 есть $\mathbf{b}(-1;4;7)$. Он параллелен α, так как $(\mathbf{b},\mathbf{n}) = 0$, то есть прямая ℓ_3 параллельна α. Поэтому площадь треугольника ABC не меньше половины произведения расстояния d_1 между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 и расстояния d_2 от прямой ℓ_3 до плоскости α. Заметим теперь, что прямая ℓ_3 перпендикулярна прямым ℓ_1 и ℓ_2. Выберем произвольную точку на ℓ_3 (например, $C(0;0;0)$). Проведём плоскость β через точку C перпендикулярно ℓ_1. Обозначим точки пересечения β с ℓ_1 и ℓ_2 как A и B соответственно. Тогда площадь полученного треугольника ABC равна $\frac{1}{2}d_1d_2$, поскольку длина AB равна расстоянию между прямыми ℓ_1 и ℓ_2, а высота треугольника, проведённая к AB, равна расстоянию от прямой ℓ_3 до плоскости α. Расстояние d_1 легко найти: вектор $\overrightarrow{MN} = (-1;4;7)$ перпендикулярен вектору

[3] Пространство непрерывных функций со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^{2} f(x)g(x)\,dx$ и нормой, равной $\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int\limits_{-1}^{2} f^2(x)\,dx}$.

[4] Согласно неравенству Коши–Шварца, $\left|(f,g)\right| \leqslant \|f\|\cdot\|g\|$, причём равенство достигается, если и только если f и g линейно зависимы.

$\mathbf{a}(3;-1;1)$, поэтому $AB = MN = \sqrt{66}$. Расстояние d_2 равно расстоянию от точки C до плоскости α и равно $\frac{2}{\sqrt{6}}$. Поэтому искомая площадь равна $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{66} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{11}$.

10. **(3 балла)** Линейное преобразование φ в некотором ортонормированном базисе задается вещественной симметрической матрицей A порядка 3. Известно, что след матрицы A равен 2; $\mathbf{a}_1(3;1;-2)$ и $\mathbf{a}_2(1;-1;1)$ – собственные векторы φ, отвечающие собственным значениям 1 и -1 соответственно. Выясните, существует ли собственный вектор $\mathbf{a}_3$, образующий вместе с векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно независимую систему, и имеющий координаты $(1;x;y)$. В случае утвердительного ответа найдите оставшиеся координаты вектора $\mathbf{a}_3$ и соответствующее ему собственное значение (все координаты рассматриваются в исходном ортонормированном базисе).

Ответ: $\mathbf{a}_3(1;5;4)$; $\lambda_3 = 2$.

Решение. Так как матрица A симметрическая и базис ортонормированный, то преобразование φ является самосопряженным. Известно, что такие преобразования диагонализируемы. В силу инвариантности $\mathrm{tr}A$ равен сумме всех собственных значений преобразования φ. Отсюда находим оставшееся собственное значение: $\lambda_3 = 2-0 = 2$. Поскольку собственные значения оказались различными, все собственные подпространства одномерны. Собственные векторы самосопряженного преобразования, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны. Поэтому любой собственный вектор, линейно независимый с $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, пропорционален векторному произведению $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = (-1;-5;-4)$. Таким образом, вектор $\mathbf{a}_3$ существует, $\mathbf{a}_3(1;5;4)$. Он отвечает значению $\lambda_3 = 2$.

БИЛЕТ 3

1. **(2 балла)** Найдите остаток от деления многочлена $x^{1002} + x^{999}$ на многочлен $x^3 + 5x$.

Ответ: $R(x) = 5^{500}x^2 - 5^{499}x$.

Решение. Поскольку делитель является многочленом третьей степени, остаток имеет степень не выше второй, и он может быть представлен в виде $R(x) = ax^2 + bx + c$. Выполняя деление, получаем

$$x^{1002} + x^{999} = Q(x)\left(x^3 + 5x\right) + R(x), \tag{3}$$

где $Q(x)$ – некий многочлен (частное от деления). Многочлен $x^3 + 5x$ имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{5}i$, $x_3 = -\sqrt{5}i$. Подставляя в равенство (3) вместо x числа 0 и $i\sqrt{5}$, получаем уравнения $0 = Q(0) \cdot 0 + c$ и $-5^{501} - 5^{499}\sqrt{5}i = Q\left(i\sqrt{5}\right) \cdot 0 - 5a + b\sqrt{5}i + c$. Из первого равенства следует, что $c = 0$, а во втором можем приравнять действительную и мнимую части: $-5^{501} = -5a$, $-5^{499}\sqrt{5} = b\sqrt{5}$. Значит, $a = 5^{500}$, $b = -5^{499}$. Поэтому остаток $R(x) = 5^{500}x^2 - 5^{499}x$.

2. **(2 балла)** Пусть L – линейное пространство симметрических матриц $\left(A^T = A\right)$ размера 5×5 со стандартными операциями сложения и умножения на число. Существует ли линейное преобразование φ пространства L такое, что $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\varphi$?

Ответ: не существует.

Решение. Отметим, что $\dim L = 15$ (симметрическая матрица однозначно задается элементами, стоящими на главной диагонали и ниже неё). Известно, что $\dim L = \dim \mathrm{Im}\,\varphi + \dim \mathrm{Ker}\,\varphi$. Предположим, что нашлось такое φ, что $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\varphi$. Но тогда $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim \mathrm{Ker}\,\varphi = 7{,}5$. Противоречие.

3. **(2 балла)** Пусть y_1 и y_2 – различные решения уравнения $y''' + 6y'' + 9y' = e^{\sin 3x}$. Обязан ли существовать предел $\lim\limits_{x\to+\infty} (y_2(x) - y_1(x))$?

Ответ: обязан.

Решение. Разность частных решений неоднородного уравнения – это решение соответствующего однородного уравнения. В нашем случае характеристическое уравнение есть $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$. Его корнями являются числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -3$. Поэтому любое решение однородного уравнения представимо в виде $y_0 = C_1 + (C_2 + C_3x)\,e^{-3x}$, где C_1, C_2, C_3 – некоторые постоянные. Следовательно, предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(C_1 + (C_2 + C_3x)\,e^{-3x}\right) = C_1$.

4. **(2 балла)** Определите радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{4^{2n}} x^n$, где a_n – количество полных кубов, не превосходящих числа n^{2019}.

Ответ: 16.

Решение. Верна оценка $1 \leqslant a_n \leqslant n^{2019}$ (оценка сверху получается из очевидного вывода, что a_n не превосходит количества всех чисел от 1 до n^{2019}). Тогда $\frac{1}{16} \leqslant \sqrt[n]{\frac{a_n}{4^{2n}}} \leqslant \frac{(\sqrt[n]{n})^{2019}}{16}$. Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{4^{2n}}} = \frac{1}{16}$. Следовательно, по формуле Коши–Адамара $R = 16$.

Замечание. На самом деле, значение a_n равно n^{673}.

5. **(3 балла)** Независимые случайные величины ξ и η равномерно распределены на отрезках $[0;2]$ и $[1;4]$ соответственно. Найдите плотность распределения случайной величины $\Gamma = \eta - 3\xi$.

Ответ: $f_\Gamma(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -5; \\ \frac{1}{18}(x+5), & -5 < x \leqslant -2; \\ \frac{1}{6}, & -2 < x \leqslant 1; \\ -\frac{1}{18}(x-4), & 1 < x \leqslant 4; \\ 0, & x > 4. \end{cases}$

Решение. Случайный вектор $(\xi;\eta)$ равномерно распределён на прямоугольнике $[0;2] \times [1;4]$. Следовательно, вероятность $P\{\Gamma < x\}$ равна отношению площади фигуры, полученной пересечением этого прямоугольника и полуплоскости $x_2 - 3x_1 < x$, к площади всего прямоугольника. Получаем

$$F_\Gamma(x) = P\{\Gamma < x\} = \begin{cases} 0, & x \leqslant -5; \\ \frac{(x+5)^2}{36}, & -5 < x \leqslant -2; \\ \frac{2x+7}{12}, & -2 < x \leqslant 1; \\ 1 - \frac{(x-4)^2}{36}, & 1 < x \leqslant 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Дифференцируя функцию распределения $F_\Gamma(x)$, находим требуемую плотность распределения:

$$f_\Gamma(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -5; \\ \frac{1}{18}(x+5), & -5 < x \leqslant -2; \\ \frac{1}{6}, & -2 < x \leqslant 1; \\ -\frac{1}{18}(x-4), & 1 < x \leqslant 4; \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

6. **(2 балла)** На каждой из сторон треугольника отмечено по 11 точек (при этом все отмеченные точки различны, и ни одна из них не является вершиной треугольника). Из 33 отмеченных точек наугад выбираются четыре. Найдите вероятность того, что эти четыре точки являются вершинами некоторого четырёхугольника.

Ответ: $\frac{22}{31}$.

Решение. Общее количество способов выбрать 4 точки из имеющихся равно $C_{33}^4 = \frac{33\cdot32\cdot31\cdot30}{4!} = 40\,920$. Из выбранных точек было возможно образовать четырёхугольник в следующих случаях: (а) две точки лежат на одной стороне треугольника, а две на другой или (б) две точки лежат на одной стороне треугольника, а на двух оставшихся лежит по одной точке. В случае (а) есть $C_3^2 \cdot C_{11}^2 \cdot C_{11}^2 = 3 \cdot 55 \cdot 55 = 9\,075$ способов (сначала выбираем две стороны из трёх, на которых лежат точки, а затем на каждой стороне выбираем по две точки из одиннадцати); в случае (б) количество способов равно $C_3^2 \cdot C_{11}^2 \cdot C_{11}^1 \cdot C_{11}^1 = 3 \cdot 55 \cdot 11 \cdot 11 = 19\,965$ (выбираем две стороны, на которых лежит по одной точке, затем выбираем по одной точке из одиннадцати на этих сторонах; наконец, выбираем две точки на оставшейся стороне). Значит, искомая вероятность есть $\frac{9\,075+19\,965}{40\,920} = \frac{29\,040}{40\,920} = \frac{22}{31}$.

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x;y) = e^{3x^2+2y^2}$ на множестве

$$S = \left\{ (x;y) \,\middle|\, \sqrt{2x} + \sqrt{3y} = 5 \right\}.$$

Ответ: $\max\limits_S f = f\left(\frac{25}{2};0\right) = e^{1875/4}$; $\min\limits_S f = f(2;3) = e^{30}$.

Решение. Множество S является замкнутым (как линия уровня непрерывной функции $g(x,y) = \sqrt{2x} + \sqrt{3y}$) и ограниченным ($S$ лежит в прямоугольнике $\left[0;\frac{25}{2}\right] \times \left[0;\frac{25}{3}\right]$). Поэтому по теореме Вейерштрасса $\min\limits_S f$ и $\max\limits_S f$ существуют.

При $x > 0$, $y > 0$ функции f и g непрерывно дифференцируемы и градиент $\nabla g \neq 0$. Поэтому, если экстремальное значение принимается в точке S с положительными координатами, то эта точка по необходимому условию условного экстремума является стационарной точкой функции Лагранжа $L = f(x;y) - \lambda g(x;y)$. Система

$$\begin{cases} L'_x = 6xe^{3x^2+2y^2} - \frac{\lambda}{\sqrt{2x}} = 0, \\ L'_y = 4ye^{3x^2+2y^2} - \frac{\lambda\sqrt{3}}{2\sqrt{y}} = 0, \\ \sqrt{2x} + \sqrt{3y} = 5, \end{cases}$$

имеет единственное решение $(2;3)$ (при $\lambda = 24e^{30}$). Сравнивая значения f в стационарной точке $(2;3)$ и концевых точках $\left(\frac{25}{2};0\right)$ и $\left(0;\frac{25}{3}\right)$, получаем, что $\max\limits_S f = f\left(\frac{25}{2};0\right) = e^{1875/4}$ и $\min\limits_S f = f(2;3) = e^{30}$.

8. **(3 балла)** Дана непрерывная на отрезке $[-2;1]$ функция f такая, что $\int\limits_{-2}^{1} f^2(x)\,dx = 84$ и $\int\limits_{-2}^{1} f(x)(2-x)\,dx = 42$. Найдите $\min\limits_{x\in[-2;1]} \left(x^2 - f(x)\right)$.

Ответ: -5.

Решение. Обозначим $g(x) = 2-x$. Функции $f(x)$ и $g(x)$ являются элементами Евклидова пространства[5] $CL_2[-2;1]$. При этом $\|g\|^2 = (g,g) = \int\limits_{-2}^{1} g^2(x)\,dx = 21$. По условию задачи имеем, что $\|f\|^2 = \sqrt{84}$, $(f,g) = 42$. Получается, что $(f,g) = 42 = \sqrt{84}\cdot\sqrt{21} = \|f\|\cdot\|g\|$, а такое возможно тогда и только тогда, когда $f(x)$ и $g(x)$ являются линейно зависимыми функциями[6] на $[-2;1]$.

Пусть $f(x) = k\cdot g(x)$; тогда $(f,g) = k\cdot(g,g) = k\cdot 21 = 42$, откуда следует, что $k = 2$ и $f(x) = 4-2x$. Итак, $\min\limits_{[-2;1]} \left(x^2 - f(x)\right) = \min\limits_{[-2;1]} \left(x^2 + 2x - 4\right) = \min\limits_{[-2;1]} \left((x+1)^2 - 5\right) = -5$.

9. **(3 балла)** В пространстве расположены прямые

$$\ell_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}, \quad \ell_2: \frac{x+4}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{1}, \quad \ell_3: \frac{x}{-5} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}.$$

На прямой ℓ_1 выбрана точка A, на ℓ_2 – точка B, на ℓ_3 – точка C. Найдите наименьшую возможную площадь треугольника ABC. Система координат декартова прямоугольная (базис ортонормированный).

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Заметим, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны (они имеют один и тот же направляющий вектор $\mathbf{a}(1;1;1)$). Проведем через ℓ_1 и ℓ_2 плоскость (назовём её α) и найдем её уравнение. На прямой ℓ_1 лежит точка $M(1;0;2)$, на прямой ℓ_2 – точка $N(-4;1;6)$, а вектор $\mathbf{a}$ параллелен α. Отсюда вектор нормали к плоскости равен

$$\mathbf{a} \times \overrightarrow{MN} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k} = -11\mathbf{n},$$

[5] Пространство непрерывных функций со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-2}^{1} f(x)g(x)\,dx$ и нормой, равной $\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int\limits_{-2}^{1} f^2(x)\,dx}$.

[6] Согласно неравенству Коши–Шварца, $\left|(f,g)\right| \leqslant \|f\|\cdot\|g\|$, причём равенство достигается, если и только если f и g линейно зависимы.

где $\mathbf{n}(1;-3;2)$. Тогда уравнение плоскости α – это $x-3y+2z-5=0$.

Направляющий вектор прямой ℓ_3 есть $\mathbf{b}(-5;1;4)$. Он параллелен α, так как $(\mathbf{b},\mathbf{n})=0$, то есть прямая ℓ_3 параллельна α. Поэтому площадь треугольника ABC не меньше половины произведения расстояния d_1 между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 и расстояния d_2 от прямой ℓ_3 до плоскости α. Заметим теперь, что прямая ℓ_3 перпендикулярна прямым ℓ_1 и ℓ_2. Выберем произвольную точку на ℓ_3 (например, $C(0;0;0)$). Проведём плоскость β через точку C перпендикулярно ℓ_1. Обозначим точки пересечения β с ℓ_1 и ℓ_2 как A и B соответственно. Тогда площадь полученного треугольника ABC равна $\frac{1}{2}d_1d_2$, поскольку длина AB равна расстоянию между прямыми ℓ_1 и ℓ_2, а высота треугольника, проведённая к AB, равна расстоянию от прямой ℓ_3 до плоскости α. Расстояние d_1 легко найти: вектор $\overrightarrow{MN}=(-5;1;4)$ перпендикулярен вектору $\mathbf{a}(1;1;1)$, поэтому $AB=MN=\sqrt{42}$. Расстояние d_2 равно расстоянию от точки C до плоскости α и равно $\frac{5}{\sqrt{14}}$. Поэтому искомая площадь равна $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{42}\cdot\frac{5}{\sqrt{14}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

10. **(3 балла)** Линейное преобразование φ в некотором ортонормированном базисе задается вещественной симметрической матрицей A порядка 3. Известно, что след матрицы A равен 2; $\mathbf{a}_1(3;2;-1)$ и $\mathbf{a}_2(2;-1;4)$ – собственные векторы φ, отвечающие собственным значениям 1 и -2 соответственно. Выясните, существует ли собственный вектор $\mathbf{a}_3$, образующий вместе с векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно независимую систему, и имеющий координаты $(1;x;y)$. В случае утвердительного ответа найдите оставшиеся координаты вектора $\mathbf{a}_3$ и соответствующее ему собственное значение (все координаты рассматриваются в исходном ортонормированном базисе).

Ответ: $\mathbf{a}_3(1;-2;-1)$; $\lambda_3=3$.

Решение. Так как матрица A симметрическая и базис ортонормированный, то преобразование φ является самосопряженным. Известно, что такие преобразования диагонализируемы. В силу инвариантности $\mathrm{tr}A$ равен сумме всех собственных значений преобразования φ. Отсюда находим оставшееся собственное значение: $\lambda_3=2-(-1)=3$. Поскольку собственные значения оказались различными, все собственные подпространства одномерны. Собственные векторы самосопряженного преобразования, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны. Поэтому любой собственный вектор, линейно независимый с $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, пропорционален векторному произведению $\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2=(7;-14;-7)$. Таким образом, вектор $\mathbf{a}_3$ существует, $\mathbf{a}_3(1;-2;-1)$. Он отвечает значению $\lambda_3=3$.

БИЛЕТ 4

1. **(2 балла)** Найдите остаток от деления многочлена $x^{999}+x^{998}$ на многочлен x^3+7x.

Ответ: $R(x)=7^{498}x^2-7^{499}x$.

Решение. Поскольку делитель является многочленом третьей степени, остаток имеет степень не выше второй, и он может быть представлен в виде $R(x)=ax^2+bx+c$. Выполняя деление, получаем

$$x^{999}+x^{998}=Q(x)\left(x^3+7x\right)+R(x), \tag{4}$$

где $Q(x)$ – некий многочлен (частное от деления). Многочлен x^3+7x имеет корни $x_1=0$, $x_2=\sqrt{7}i$, $x_3=-\sqrt{7}i$. Подставляя в равенство (4) вместо x числа 0 и $i\sqrt{7}$, получаем уравнения $0=Q(0)\cdot 0+c$ и $-7^{499}\sqrt{7}i-7^{499}=Q\left(i\sqrt{7}\right)\cdot 0-7a+b\sqrt{7}i+c$. Из первого равенства следует, что $c=0$, а во втором можем приравнять действительную и мнимую части: $-7^{499}=-7a$, $-7^{499}\sqrt{7}=b\sqrt{7}$. Значит, $a=7^{498}$, $b=-7^{499}$. Поэтому остаток $R(x)=7^{498}x^2-7^{499}x$.

2. **(2 балла)** Пусть L – линейное пространство симметрических матриц $\left(A^T=A\right)$ размера 6×6 со стандартными операциями сложения и умножения на число. Существует ли линейное преобразование φ пространства L такое, что $\mathrm{Im}\,\varphi=\mathrm{Ker}\,\varphi$?

Ответ: не существует.

Решение. Отметим, что $\dim L=21$ (симметрическая матрица однозначно задается элементами, стоящими на главной диагонали и ниже неё). Известно, что $\dim L=\dim\mathrm{Im}\,\varphi+\dim\mathrm{Ker}\,\varphi$. Предположим, что нашлось такое φ, что $\mathrm{Im}\,\varphi=\mathrm{Ker}\,\varphi$. Но тогда $\dim\mathrm{Im}\,\varphi=\dim\mathrm{Ker}\,\varphi=10{,}5$. Противоречие.

3. **(2 балла)** Пусть y_1 и y_2 – различные решения уравнения $y'''-6y''+9y' = e^{\cos 3x}$. Обязан ли существовать предел $\lim\limits_{x\to-\infty}(y_2(x)-y_1(x))$?

Ответ: обязан.

Решение. Разность частных решений неоднородного уравнения – это решение соответствующего однородного уравнения. В нашем случае характеристическое уравнение есть $\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda=0$. Его корнями являются числа $\lambda_1=0$, $\lambda_{2,3}=3$. Поэтому любое решение однородного уравнения представимо в виде $y_0=C_1+(C_2+C_3x)\,e^{3x}$, где C_1, C_2, C_3 – некоторые постоянные. Следовательно, предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(C_1+(C_2+C_3x)\,e^{3x}\right)=C_1$.

4. **(2 балла)** Определите радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n a_n x^n$, где a_n – количество всех делителей числа n^{2019}.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Решение. Верна оценка $1\leqslant a_n\leqslant n^{2019}$ (оценка сверху получается из очевидного вывода, что a_n не превосходит количества всех чисел от 1 до n^{2019}). Тогда $2\leqslant\sqrt[n]{2^n a_n}\leqslant 2(\sqrt[n]{n})^{2019}$. Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n a_n}=2$. Следовательно, по формуле Коши–Адамара $R=\frac{1}{2}$.

5. **(3 балла)** Независимые случайные величины ξ и η равномерно распределены на отрезках $[4;9]$ и $[1;2]$ соответственно. Найдите плотность распределения случайной величины $\Gamma=\xi+3\eta$.

Ответ: $f_\Gamma(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 7;\\ \frac{1}{15}(x-7), & 7<x\leqslant 10;\\ \frac{1}{5}, & 10<x\leqslant 12;\\ -\frac{1}{15}(x-15), & 12<x\leqslant 15;\\ 0, & x>15.\end{cases}$

Решение. Случайный вектор $(\xi;\eta)$ равномерно распределён на прямоугольнике $[4;9]\times[1;2]$. Следовательно, вероятность $P\{\Gamma<x\}$ равна отношению площади фигуры, полученной пересечением этого прямоугольника и полуплоскости $x_1+3x_2<x$, к площади всего прямоугольника. Получаем

$$F_\Gamma(x)=P\{\Gamma<x\}=\begin{cases}0, & x\leqslant 7;\\ \frac{(x-7)^2}{30}, & 7<x\leqslant 10;\\ \frac{2x-17}{10}, & 10<x\leqslant 12;\\ 1-\frac{(x-15)^2}{30}, & 12<x\leqslant 15;\\ 1, & x>15.\end{cases}$$

Дифференцируя функцию распределения $F_\Gamma(x)$, находим требуемую плотность распределения:

$$f_\Gamma(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 7;\\ \frac{1}{15}(x-7), & 7<x\leqslant 10;\\ \frac{1}{5}, & 10<x\leqslant 12;\\ -\frac{1}{15}(x-15), & 12<x\leqslant 15;\\ 0, & x>15.\end{cases}$$

6. **(2 балла)** На каждой из сторон треугольника отмечено по 8 точек (при этом все отмеченные точки различны, и ни одна из них не является вершиной треугольника). Из 24 отмеченных точек наугад выбираются четыре. Найдите вероятность того, что эти четыре точки являются вершинами некоторого четырёхугольника.

Ответ: $\frac{8}{11}$.

Решение. Общее количество способов выбрать 4 точки из имеющихся равно $C_{24}^4=\frac{24\cdot23\cdot22\cdot21}{4!}=23\cdot22\cdot21=10\,626$. Из выбранных точек было возможно образовать четырёхугольник в следующих случаях:

(а) две точки лежат на одной стороне треугольника, а две на другой или (б) две точки лежат на одной стороне треугольника, а на двух оставшихся лежит по одной точке. В случае (а) есть $C_3^2 \cdot C_8^2 \cdot C_8^2 = 3 \cdot 28 \cdot 28 = 2\,352$ способов (сначала выбираем две стороны из трёх, на которых лежат точки, а затем на каждой стороне выбираем по две точки из восьми); в случае (б) количество способов равно $C_3^2 \cdot C_8^2 \cdot C_8^1 \cdot C_8^1 = 3 \cdot 28 \cdot 8 \cdot 8 = 5\,376$ (выбираем две стороны, на которых лежит по одной точке, затем выбираем по одной точке из восьми на этих сторонах; наконец, выбираем две точки на оставшейся стороне). Значит, искомая вероятность есть $\frac{2\,352+5\,376}{10\,626} = \frac{7\,728}{10\,626} = \frac{8}{11}$.

7. **(3 балла)** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x;y) = 1 - 3x^2 - y^2$ на множестве

$$S = \left\{ (x;y) \,\middle|\, \sqrt{x} + \sqrt{3y} = 4 \right\}.$$

Ответ: $\min\limits_S f = f(16;0) = -767$, $\max\limits_S f = f(1;3) = -11$.

Решение. Множество S является замкнутым (как линия уровня непрерывной функции $g(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{3y}$) и ограниченным ($S$ лежит в прямоугольнике $[0;16] \times \left[0;\frac{16}{3}\right]$). Поэтому по теореме Вейерштрасса $\min\limits_S f$ и $\max\limits_S f$ существуют.

При $x > 0$, $y > 0$ функции f и g непрерывно дифференцируемы и градиент $\nabla g \neq 0$. Поэтому, если экстремальное значение принимается в точке S с положительными координатами, то эта точка по необходимому условию условного экстремума является стационарной точкой функции Лагранжа $L = f(x;y) - \lambda g(x;y)$. Система

$$\begin{cases} L'_x = -6x - \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} = 0, \\ L'_y = -2y - \frac{\lambda\sqrt{3}}{2\sqrt{y}} = 0, \\ \sqrt{x} + \sqrt{3y} = 4, \end{cases}$$

имеет единственное решение $(1;3)$ (при $\lambda = -12$). Сравнивая значения f в стационарной точке $(1;3)$ и концевых точках $(16;0)$ и $\left(0;\frac{16}{3}\right)$, получаем, что $\min\limits_S f = f(16;0) = -767$ и $\max\limits_S f = f(1;3) = -11$.

8. **(3 балла)** Дана непрерывная на отрезке $[-3;0]$ функция f такая, что $\int\limits_{-3}^{0} f^2(x)\,dx = 12$ и $\int\limits_{-3}^{0} f(x)(x+2)\,dx = 6$. Найдите $\max\limits_{x\in[-3;0]} \left(-x^2 - 2f(x)\right)$.

Ответ: -4.

Решение. Обозначим $g(x) = x+2$. Функции $f(x)$ и $g(x)$ являются элементами Евклидова пространства[7] $CL_2[-3;0]$. При этом $\|g\|^2 = (g,g) = \int\limits_{-3}^{0} g^2(x)\,dx = 3$. По условию задачи имеем, что $\|f\|^2 = 12$, $(f,g) = 6$.

Получается, что $(f,g) = 6 = \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \|f\| \cdot \|g\|$, а такое возможно тогда и только тогда, когда $f(x)$ и $g(x)$ являются линейно зависимыми функциями[8] на $[-3;0]$.

Пусть $f(x) = k \cdot g(x)$; тогда $(f,g) = k \cdot (g,g) = k \cdot 3 = 6$, откуда следует, что $k = 2$ и $f(x) = 2x+4$. Итак, $\max\limits_{[-3;0]} \left(-x^2 - 2f(x)\right) = \max\limits_{[-3;0]} \left(-x^2 - 4x - 8\right) = \max\limits_{[-3;0]} \left(-(x+2)^2 - 4\right) = -4$.

9. **(3 балла)** В пространстве расположены прямые

$$\ell_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{2-z}{3}, \quad \ell_2 : \frac{x-8}{1} = \frac{y+4}{1} = \frac{3-z}{3}, \quad \ell_3 : \frac{x}{7} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{1}.$$

На прямой ℓ_1 выбрана точка A, на ℓ_2 – точка B, на ℓ_3 – точка C. Найдите наименьшую возможную площадь треугольника ABC. Система координат декартова прямоугольная (базис ортонормированный).

---

[7] Пространство непрерывных функций со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-3}^{0} f(x)g(x)\,dx$ и нормой, равной $\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int\limits_{-3}^{0} f^2(x)\,dx}$.

[8] Согласно неравенству Коши–Шварца, $\left|(f,g)\right| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$, причём равенство достигается, если и только если f и g линейно зависимы.

Ответ: $\frac{3\sqrt{11}}{2}$.

Решение. Заметим, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны (они имеют один и тот же направляющий вектор $\mathbf{a}(1;1;-3)$). Проведем через ℓ_1 и ℓ_2 плоскость (назовём её α) и найдем её уравнение. На прямой ℓ_1 лежит точка $M(1;0;2)$, на прямой ℓ_2 – точка $N(8;-4;3)$, а вектор $\mathbf{a}$ параллелен α. Отсюда вектор нормали к плоскости равен

$$\mathbf{a} \times \overrightarrow{MN} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 7 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -11\mathbf{i} - 22\mathbf{j} - 11\mathbf{k} = -11\mathbf{n},$$

где $\mathbf{n}(1;2;1)$. Тогда уравнение плоскости α – это $x + 2y + z - 3 = 0$.

Направляющий вектор прямой ℓ_3 есть $\mathbf{b}(7;-4;1)$. Он параллелен α, так как $(\mathbf{b}, \mathbf{n}) = 0$, то есть прямая ℓ_3 параллельна α. Поэтому площадь треугольника ABC не меньше половины произведения расстояния d_1 между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 и расстояния d_2 от прямой ℓ_3 до плоскости α. Заметим теперь, что прямая ℓ_3 перпендикулярна прямым ℓ_1 и ℓ_2. Выберем произвольную точку на ℓ_3 (например, $C(0;0;0)$). Проведём плоскость β через точку C перпендикулярно ℓ_1. Обозначим точки пересечения β с ℓ_1 и ℓ_2 как A и B соответственно. Тогда площадь полученного треугольника ABC равна $\frac{1}{2}d_1d_2$, поскольку длина AB равна расстоянию между прямыми ℓ_1 и ℓ_2, а высота треугольника, проведённая к AB, равна расстоянию от прямой ℓ_3 до плоскости α. Расстояние d_1 легко найти: вектор $\overrightarrow{MN} = (7;-4;1)$ перпендикулярен вектору $\mathbf{a}(1;1;-3)$, поэтому $AB = MN = \sqrt{66}$. Расстояние d_2 равно расстоянию от точки C до плоскости α и равно $\frac{3}{\sqrt{6}}$. Поэтому искомая площадь равна $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{66} \cdot \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{11}}{2}$.

10. **(3 балла)** Линейное преобразование φ в некотором ортонормированном базисе задается вещественной симметрической матрицей A порядка 3. Известно, что след матрицы A равен 3, $\mathbf{a}_1(1;-2;-1)$ и $\mathbf{a}_2(3;2;-1)$ – собственные векторы φ, отвечающие собственным значениям 1 и -1 соответственно. Выясните, существует ли собственный вектор $\mathbf{a}_3$, образующий вместе с векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно независимую систему, и имеющий координаты $(2;x;y)$. В случае положительного ответа выпишите оставшиеся координаты вектора $\mathbf{a}_3$ и соответствующее ему собственное значение (все координаты рассматриваются в исходном ортонормированном базисе).

Ответ: $\mathbf{a}_3(2;-1;4)$; $\lambda_3 = 3$.

Решение. Так как матрица A симметрическая и базис ортонормированный, то преобразование φ является самосопряжённым. Известно, что такие преобразования диагонализируемы. В силу инвариантности $\mathrm{tr}A$ равен сумме всех собственных значений преобразования φ. Отсюда находим оставшееся собственное значение: $\lambda_3 = 3 - 0 = 3$. Поскольку собственные значения оказались различными, все собственные подпространства одномерны. Собственные векторы самосопряженного преобразования, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны. Поэтому любой собственный вектор, линейно независимый с $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, пропорционален векторному произведению $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = (4;-2;8)$. Таким образом, вектор $\mathbf{a}_3$ существует, $\mathbf{a}_3(2;-1;4)$. Он отвечает значению $\lambda_3 = 3$.