

ОСВОЕНИЕ КОСМОСА

Заключительный (очный) этап  
для студентов бакалавриата

Билет состоит из **9 заданий**. На все вопросы заданий необходимо дать полный развёрнутый ответ, все приведённые утверждения должны быть максимально обоснованы, решения – максимально подробны. На решение всех заданий билета отводится **240 минут**.

**1. Основы проектирования КЛА**

Зачем для изготовления баков ряда ракет-носителей с жидкостными ракетными двигателями применяют вафельные оболочки? Какие ещё виды подкрепления оболочки возможны? Привести преимущества и недостатки вафельного подкрепления по сравнению с другими.

**Ответ:**

В отечественной практике обечайки баков с частой сеткой подкрепляющих рёбер (впоследствии получившие название «вафельные») впервые были применены в конструкции управляемой баллистической ракеты УР-200.

Вафельное подкрепление, как и другие виды подкрепления обечайки баков, используются в первую очередь для повышения значений напряжений, вызывающих потерю устойчивости бака под действием сжимающих осевых нагрузок.

При этом необходимо отметить, что для большинства ракет-носителей во время полёта, т.е. когда действуют максимальные осевые нагрузки (от двигательной установки), баки растянуты давлением наддува. Таким образом основная задача подкрепляющих элементов обеспечить достаточную прочность и жёсткость обечайки бака не в полёте, а в процессе подготовки к старту, т.е. когда ракета нагружена собственным весом (статической сжимающей нагрузкой).

Кроме вафельных оболочек традиционно для подкрепления тонкостенных оболочек применяются стрингеры и шпангоуты, а также в ряде случаев сотовые (с сотовым наполнителем) и гофрированные конструкции.

По сравнению с другими видами подкреплений вафельные оболочки имеют более высокое массовое совершенство (выше несущая способность при одинаковой массе), но они существенно более трудоёмки при изготовлении (химическое или механическое фрезерование).

**Критерии оценивания (max 7 баллов)**

- Показано, что вафельное подкрепление нужно для повышения прочности и устойчивости бака (+1 балл)
- Показано, что на бак ракеты-носителя в полёте действуют растягивающие напряжения (+1 балл)
- Показано, что подкрепление необходимо во время подготовки к старту, пока бак не наддут (max +2 балла)
- Перечислены виды подкрепления тонкостенных конструкций (max +2 балла)
- Приведены преимущества и недостатки вафельного подкрепления (+1 балл)

**2. Основы проектирования КЛА**

Для колонизации Марса необходимо создание герметичных модулей с комфортной (по условиям естественной конвекции) средой для пребывания человека. Отработка параметров системы жизнеобеспечения марсианских модулей должна быть проведена на Земле. С помощью теории подобия обоснуйте выбор геометрических размеров наземного испытательного модуля ( $g_{\text{зем}} = 9.81 \text{ м/с}^2$ ,  $g_{\text{Марс}} = 3.86 \text{ м/с}^2$ ).

## Решение

Для подобия процессов в марсианском и наземном модулях необходимо равенство определяющих критериев подобия. При стационарной естественной конвекции должно выполняться условие равенства критериев Грасгофа и Прандтля.

$$Gr_{\text{Марс}} = Gr_{\text{Зем}} , Pr_{\text{Марс}} = Pr_{\text{Зем}}$$
$$\frac{g_{\text{Марс}} \beta_{\text{Марс}} l_{\text{Марс}}^3 \Delta T_{\text{Марс}}}{\nu_{\text{Марс}}^2} = \frac{g_{\text{Зем}} \beta_{\text{Зем}} l_{\text{Зем}}^3 \Delta T_{\text{Зем}}}{\nu_{\text{Зем}}^2},$$
$$\frac{\nu_{\text{Марс}}}{a_{\text{Марс}}} = \frac{\nu_{\text{Зем}}}{a_{\text{Зем}}}.$$

Физические свойства воздуха в марсианском и наземном модулях одинаковые. Также при испытаниях должны быть соблюдены равенства полей температур  $\Delta T_{\text{Марс}} = \Delta T_{\text{Зем}}$ .

Поэтому

$$g_{\text{Марс}} l_{\text{Марс}}^3 = g_{\text{Зем}} l_{\text{Зем}}^3,$$

тогда

$$l_{\text{Зем}} = l_{\text{Марс}} \left( \frac{g_{\text{Марс}}}{g_{\text{Зем}}} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Так как  $g_{\text{Зем}} = 9.81 \text{ м/с}^2$ ,  $g_{\text{Марс}} = 3.86 \text{ м/с}^2$ , то  $l_{\text{Зем}} = 0.73 l_{\text{Марс}}$

Итак, размер испытательного наземного модуля должен быть в 1.37 раз меньше марсианского модуля.

**Ответ:**

Размер испытательного наземного модуля должен быть в 1.37 раз меньше марсианского модуля.

## Критерии оценивания (max 10 баллов)

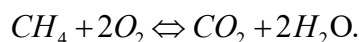
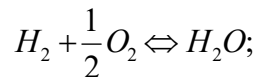
- Обоснованы условия подобия процессов в марсианском и наземном модулях (max +4 балла)
- Правильно выражен геометрический размер наземного модуля через известные по условию параметры (max +5 баллов)
- Получен правильный ответ (+1 балла)

## 3. Основы устройства двигательных установок КЛА

Во сколько раз должен измениться секундный массовый расход жидкого кислорода в случае замены жидкого водорода на жидкий метан? Принять, что коэффициент избытка окислителя для кислород-водородного топлива равен 0.6; для кислород-метанового – 0.8 при одинаковых массовых расходах горючего  $\dot{m}_m$ .

**Решение**

Уравнение реакций полного сгорания горючего



Из данных реакций находим мольное стехиометрическое соотношение компонентов:

$$K_0(H_2) = 1/2;$$

$$K_0(CH_4) = 2/1 = 2;$$

и массовое стехиометрическое соотношение

$$K_{m0}(H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_{O_2}}{\mu_{H_2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{2} = 8;$$

$$K_{m0}(CH_4) = 2 \cdot \mu_{O_2} / \mu_{CH_4} = 2 \cdot 32 / 16 = 4.$$

Действительное массовое соотношение компонентов для кислород-водородного и кислород-метанового топлива равны

$$K_m(H_2) = (H_2)K_{m0}(H_2) = 0.6 \cdot 8 = 4.8;$$

$$K_m(CH_4) = (CH_4)K_{m0}(CH_4) = 0.8 \cdot 4 = 3.2.$$

Тогда учитывая, что

$$K_m(H_2) = \dot{m}_{O_2} / \dot{m}_{H_2} = 4.8;$$

$$K_m(CH_4) = \dot{m}_{O_2} / \dot{m}_{CH_4} = 3.2,$$

то в случае использования водорода секундный массовый расход кислорода будет в  $k = 4.8 / 3.2 = 1.5$  раза больше.

**Ответ:**

В случае использования водорода секундный массовый расход кислорода будет в  $k = 1.5$  раза больше.

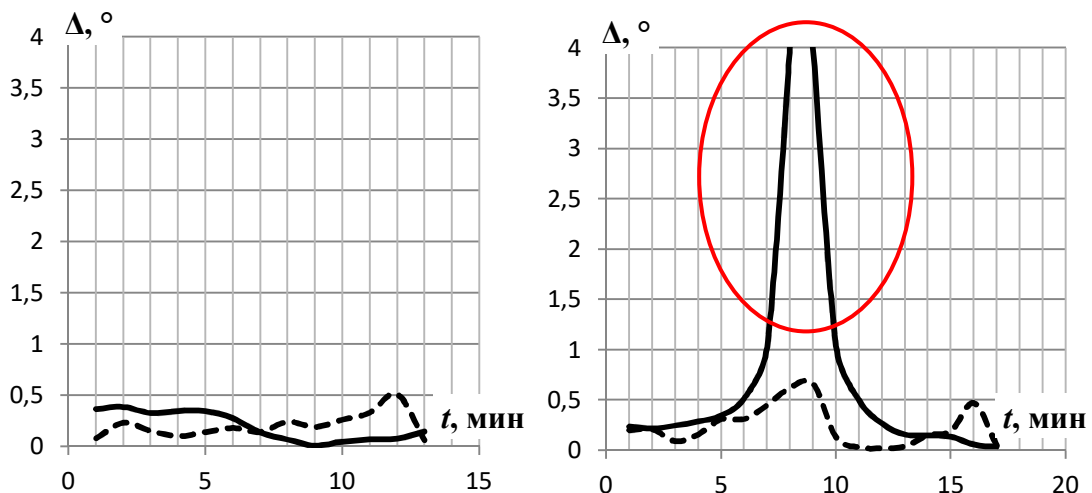
#### Критерии оценивания (max 10 баллов)

- Правильно записано уравнение реакций полного сгорания горючего (max +3 балла)
- Правильно записано массовое стехиометрическое соотношение компонентов (max +3 балла)
- Правильно вычислено действительное массовое соотношение компонентов (max +3 балла)
- Получен правильный ответ (+1 балл)

#### 4. Баллистика/Теория управления

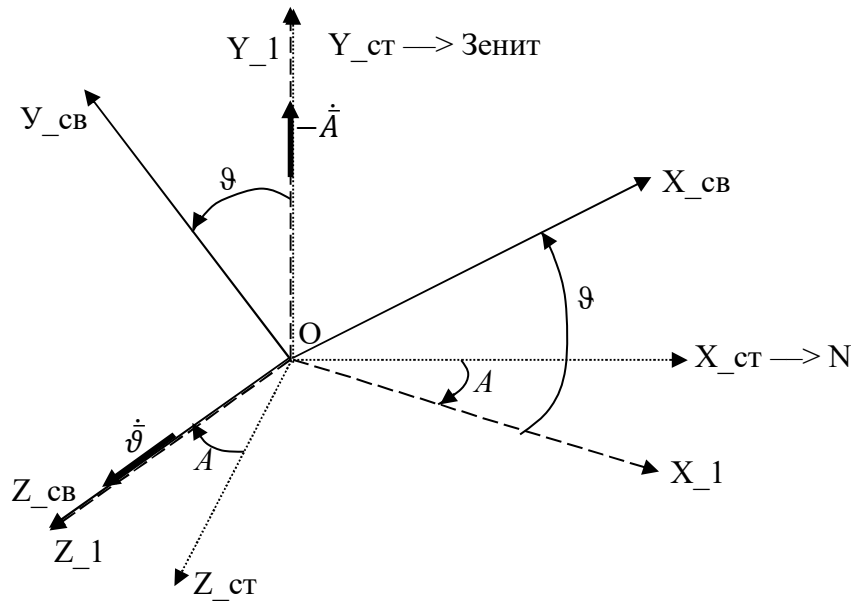
В Центре управления полётом малых космических аппаратов студентами создана расчётная программа, позволяющая по упрощённой (но вполне достоверной) модели движения рассчитывать целеуказания для антенных систем в процессе проведения сеанса связи с КА. Для наведения антенны необходимо в каждый момент времени вычислять два угла: угол азимута (в плоскости горизонта от направления на "север" по часовой стрелке, от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ ) и угол возвышения (в вертикальной плоскости от горизонта до КА, от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ ). Принимаемый сигнал обладает круговой поляризацией, поэтому управление антенной по крену не требуется, но возможно. Вследствие неточности модели движения расчётные значения отличаются от данных внешней программы Orbitron, которая рассматривается как эталон. На рисунке приведены погрешности расчёта для двух прохождений КА: слева – при максимальном угле возвышения  $30$  градусов, справа – при максимальном угле возвышения  $85.6$  градуса.

Получить кинематические уравнения, связывающие угловые скорости антенны в её собственных осях с углами азимута и возвышения над горизонтом. Объяснить динамику кривой отклонения по углу азимута, наблюдаемую на правом рисунке.



Расчёт выполнен для КА "Terra", высота круговой орбиты  $h \approx 700$  км. Погрешность расчёта дана через 12 суток. Сплошным линиям на графиках соответствуют отклонения по азимуту, пунктирным – отклонения по углу возвышения над горизонтом.

**Ответ**



На рисунке показан переход от условно неподвижной системы координат (СК), ось  $X_{ст}$  которой направлена в плоскости горизонта на север, ось  $Y_{ст}$  смотрит в зенит, а  $Z_{ст}$  дополняет СК до правой тройки. Первый поворот происходит на угол азимута по часовой стрелке (этим объясняется знак минус в проекции вектора  $\dot{A}$  на вертикальную ось), второй поворот на угол места/угол возвышения КА над горизонтом против часовой стрелки. Третий поворот по крену не выполняем. Таким образом, кинематические уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}\omega_x &= -\dot{A} \sin \vartheta \\ \omega_y &= -\dot{A} \cos \vartheta \\ \omega_z &= \dot{\vartheta}\end{aligned}$$

Из этой системы видно, что  $|\dot{A}| = \frac{|\omega_y|}{\cos \vartheta}$ , то есть при углах места  $\vartheta \rightarrow 90^\circ$ ,  $|\dot{A}| \rightarrow \infty$ .

Следовательно при углах места  $\vartheta \rightarrow 90^\circ$   $\omega_x$  должно также стремиться к бесконечности, что ограничено возможностями приводов, управляющих антенной. В связи с этим, любые отклонения от эталонной модели при прохождении зенитной области будут приводить к локальному резкому росту ошибки наведения по азимуту. Для траектории, у которой есть точка  $\vartheta = 90^\circ$  (траектория лежит в вертикальной плоскости по отношению к антенне), в ней происходит мгновенное переключение азимута от значения  $A$  до  $A+180^\circ$ . Так как угол  $\vartheta$  не превышает 90 градусов, то система должна мгновенно повернуться вокруг вертикальной оси, что происходит с задержкой и приводит к ошибкам наведения по азимуту. При узкой диаграмме направленности антенны это означает потерю сигнала при прохождении зенитной области.

#### **Критерии оценивания (max 10 баллов)**

- Правильно изображена схема поворотов при преобразовании систем координат (max +3 балла).
- Правильно составлены кинематические уравнения, связывающие угловые скорости по углу места и азимуту с проекциями угловых скоростей антенны в её собственных осях (max +3 балла).
- Правильно объяснена динамика изменения ошибки наведения по азимуту при прохождении зенитной области (max +4 балла).

## 5. Баллистика

Необходимо при помощи двухимпульсного манёвра перевести КА с круговой орбиты высотой 200 км и наклонением 50 градусов на круговую орбиту высотой 36000 км и наклонением 0 градусов при неизменной долготе восходящего узла. Известно, что при выбранной схеме маневрирования наименьшие затраты суммарной характеристической скорости достигаются, если поворот орбитальной плоскости осуществлять с каждым манёвром, причём при первом манёвре плоскость нужно повернуть на 2.75 градуса. Вычислить общие затраты суммарной характеристической скорости на этот перелёт, если КА может изменять скорость только в трансверсальном и бинормальном направлениях. Гравитационная постоянная  $\mu = GM = 398600.44 \text{ км}^3/\text{с}^2$ , средний радиус Земли  $R = 6371 \text{ км}$ . *Примечание: Эксцентриситет эллипса  $e$ , большая полуось  $a$  и фокальный параметр  $p$  связаны соотношениями:*

$$e = \frac{H_{\max} - H_{\min}}{2a}; \quad p = a(1 - e^2).$$

### Решение

Предполагается, что КА выводится на опорную круговую орбиту при помощи ракеты-носителя. Эта орбита имеет высоту  $h_0 = 200 \text{ км}$  и наклонение  $i_0 = 50^\circ$ . Скорость КА при движении по этой орбите постоянна и равна  $V_0$ . Далее при помощи импульса скорости  $\Delta V_1$ , исполняемого разгонным блоком или собственной двигательной установкой, КА переходит на переходную эллиптическую траекторию (рис. 1а). Высота перигея переходного эллипса совпадает с высотой начальной орбиты  $h_0$ , а высота его апогея – с высотой целевой орбиты  $h_f = 36000 \text{ км}$ . Импульс  $\Delta V_2$  прикладывается в апоцентре переходного эллипса. Пусть в результате исполнения первого импульса  $\Delta V_1$  наклонение орбиты изменяется на величину  $\Delta i_1 = 2.75^\circ$ , а после приложения второго импульса – на величину  $\Delta i_2$ . Полное требуемое изменение наклонения составляет  $\Delta i = \Delta i_1 + \Delta i_2 = |i_f - i_0| = 50^\circ$ .

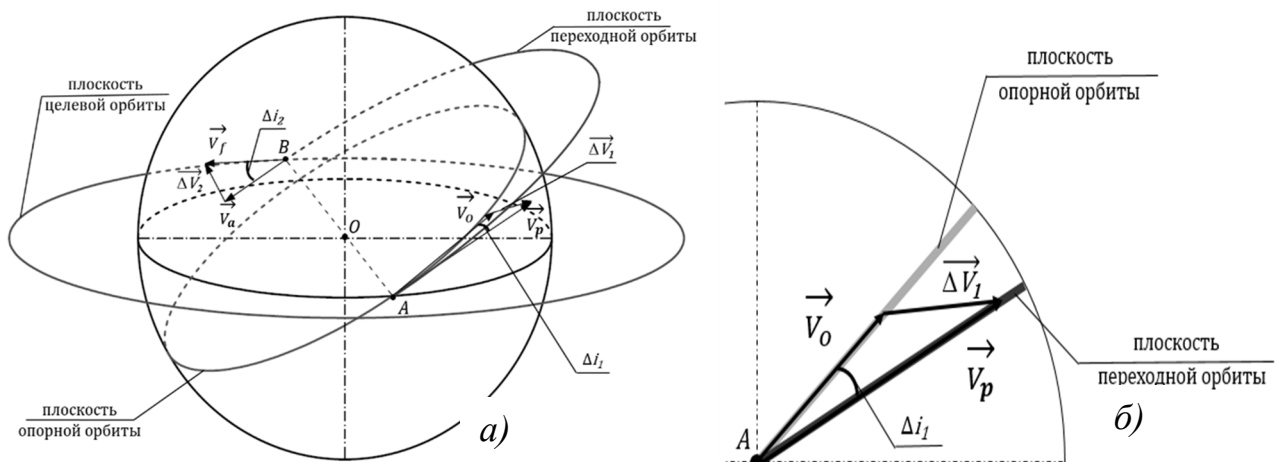


Рисунок 1. а) Схема перелёта с двукратным изменением наклонения. б) Вид на треугольник скоростей для  $\Delta V_1$  в направлении от восходящего узла к центру Земли. На рис. 1б показан вектор  $\Delta V_1$  при переходе на эллиптическую траекторию. Он представляет собой векторную разницу между требуемой скоростью КА в перигее переходного эллипса и скоростью КА на опорной круговой орбите. Модуль этого вектора определяется выражением:

$$\Delta V_1 = \sqrt{V_0^2 + V_p^2 - 2V_0V_p \cos(\Delta i_1)}, \quad (1)$$

где  $V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$  – скорость КА на опорной орбите,  $V_p = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e)$  – скорость КА в перигее переходного эллипса,  $\mu = 398600.44 \text{ км}^3/\text{с}^2$  – гравитационный параметр Земли,  $e$  и  $p$  – эксцентриситет и фокальный параметр переходного эллипса. Величины  $e$  и  $p$  можно найти по формулам:

$$e = \frac{(r_f - r_0)}{2a}; \quad p = a(1 - e^2),$$

где  $a = \frac{(r_0 + r_f)}{2}$  – большая полуось переходного эллипса;  $r_0 = R + h_0$ ,  $r_f = R + h_f$  – радиус опорной и целевой орбиты соответственно,  $R = 6371$  км – средний радиус Земли. По аналогии с формулой (1) модуль вектора  $\Delta V_2$  может быть определён как:

$$\Delta V_2 = \sqrt{V_a^2 + V_f^2 - 2V_f V_a \cos(\Delta i - \Delta i_1)}, \quad (2)$$

где  $V_f = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}}$  – скорость КА на целевой круговой орбите,  $V_a = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 - e)$  – скорость КА в апоцентре переходного эллипса.

Функция СХС принимает значение:

$$\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \sqrt{V_0^2 + V_p^2 - 2V_0 V_p \cos(\Delta i_1)} + \sqrt{V_a^2 + V_f^2 - 2V_f V_a \cos(\Delta i - \Delta i_1)} = 4.8026 \text{ км/с} \quad (3)$$

**Ответ:**

$$\Delta V_{\Sigma} = 4.8026 \text{ км/с}$$

### Критерии оценивания (max 12 баллов)

- Правильно изображена схема маневрирования в целом или по отдельности каждый из исполняемых манёвров (max +2 балла)
- Правильно составлены выражения для вычисления двух импульсов скорости (max +3 балла)
- Правильно вычислены составляющие, входящие в выражения для каждого из импульсов скорости (max +3 балла)
- Получен правильный ответ (max +2 балла)

### 6. Основы проектирования конструкций из композиционных материалов

Автоматическая межпланетная станция (АМС), корпус которой имеет форму цилиндрической оболочки из полимерного композиционного материала (ПКМ), движется от Земли в сторону Солнца вращаясь вокруг своей продольной оси. При этом солнечные лучи падают на поверхность оболочки перпендикулярно её продольной оси. Определить расстояние до Солнца, на котором полиимидное связующее ПКМ начнет разлагаться под действием нагрева. Принять: температура оболочки однородна; процесс теплообмена стационарный (установившийся); расходимость солнечных лучей можно пренебречь; поглощательная способность стенки аппарата  $A_s$  равна степени черноты  $\varepsilon$ . Плотность потока солнечного излучения на орбите Земли  $q_{s,E}$  принять равной  $1400 \text{ Вт/м}^2$ . Температуру начала разложения полиимидного связующего в ПКМ считать равной  $700 \text{ К}$ .

Сравнить, насколько ближе можно приблизиться к Солнцу в случае, если теплозащитный экран будет сделан из керамоматричного композита с допустимой температурой  $2200 \text{ К}$ .

#### Решение

1) В стационарном режиме теплообмена количество теплоты, поглощаемой на освещенной поверхности оболочки  $F_f$  равно количеству теплоты, излучаемому со всей поверхности оболочки  $F_r$ :

$$A_s \cdot q_{s,t} \cdot F_f = \varepsilon \cdot \sigma_0 (T_r^4 - T_f^4) F_r, \quad (1)$$

где  $A_s$  – интегральная поглощательная способность поверхности оболочки в спектре Солнца;  $q_{s,t}$  – текущее значение плотности падающего потока теплового излучения Солнца на расстоянии  $R$  от Земли;  $F_f$  – площадь освещенной поверхности цилиндрической оболочки;  $\varepsilon$  – излучательная способность поверхности оболочки;  $\sigma_0 = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$  – постоянная Стефана-Больцмана;  $T_r$  – температура оболочки;  $T_f$  – температура окружающего космоса;  $F_r$  – общая площадь поверхности оболочки.

В силу малости значения температуры космоса  $T_f = 3 \text{ К}$  уравнение (1) можно упростить

$$A_s \cdot q_{s,t} \cdot F_f \approx \varepsilon \cdot \sigma_0 \cdot T_r^4 \cdot F_r \quad (1a)$$

Подставляя в (1а) значения  $F_f = 2R \cdot L$ , и  $F_r = 2\pi \cdot R \cdot L$ , где  $L$  – длина оболочки в уравнение (1а) можно получить выражение для текущего значения плотности падающего потока теплового излучения Солнца на расстоянии  $R$  от Земли

$$q_{s,t} = \sigma_0 \cdot T_r^4 \cdot F_f / F_r \quad (2)$$

Проводя подстановку значений величин, входящих в (2) можно определить плотность падающего солнечного теплового потока

$$q_{s,700} = 5.67 \cdot 10^{-8} (700)^4 \cdot 0.318 = 4329 \text{ Вт/м}^2.$$

Плотность солнечного излучения по мере сближения с Солнцем возрастает прямо пропорционально квадрату расстояния. Расстояние от Земли до Солнца составляет 1 астрономическую единицу (а.е.) или 149 млн. км. Поэтому при полученном в (2) значении потока соотносятся как

$$q_{s,E} / q_{s,t} = R^2 \text{ или } R_{700} = (1400/4329)^{-2} = 0.568 \text{ а.е. или } 84.63 \text{ млн. км.}$$

Таким образом, следует ожидать начала разложения полиимидного связующего в ПКМ на расстоянии 0.568 а.е. или 84.63 млн. км от Солнца.

Аналогично

$$q_{s,2200} = 5.67 \cdot 10^{-8} (2200)^4 \cdot 0.318 = 422378 \text{ Вт/м}^2$$

$$R_{2200} = 0.06 \text{ а.е. или } 9 \text{ млн. км}$$

Тогда

$$\frac{q_{s,700}}{q_{s,2200}} = \frac{0.568}{0.058} = 9.8$$

**Ответ:**

$R = 0.568$  а.е. или 84.63 млн. км.

В 9.8 раза ближе к Солнцу сможет подлететь КА покрытый теплозащитой из керамоматричного композита.

### Критерии оценивания (max 8 баллов)

- Записано уравнение теплового баланса (max +2 балла)
- Получено соотношение для определения текущего значения плотности падающего потока теплового излучения Солнца на заданном расстоянии от Солнца (max +3 балла)
- Записана зависимость плотности теплового потока от расстояния до Солнца (+1 балл)
- Получены правильные числовые значения допустимого расстояния до Солнца (+1 балл)
- Проведено сравнение допустимых расстояний для полимерного композиционного материала и керамоматричного композита (+1 балл)

### 7. Основы тепловых режимов КЛА

Теплоизолированная ёмкость с компонентом ракетного топлива массой  $M = 50$  тонн и теплоёмкостью  $C_p = 2$  кДж/(кг·К) с начальной температурой  $T_0 = 25^\circ\text{C}$  перевозится между объектами космодрома при температуре наружного воздуха  $T_n = -40^\circ\text{C}$ . Сколько времени ёмкость может перевозиться на открытом воздухе, если коэффициент теплопередачи на её наружной поверхности площадью  $F = 250 \text{ м}^2$  составляет  $K = 1 \text{ Вт/(м}^2\text{К)}$ , а минимально допустимая температура охлаждения компонента составляет  $T_1 = 15^\circ\text{C}$ ? Теплоёмкостью ёмкости и тепловыми мостами в системе пренебречь.

#### Решение

Полная теплоёмкость емкости с компонентом

$$C = M \cdot C_p = 50000 \cdot 2000 = 1 \cdot 10^8 \text{ Дж/К}$$

Дифференциальное уравнение теплопередачи в системе ( $T$  – температура компонента,  $\tau$  – время)

$$C \frac{dT}{d\tau} = \Sigma Q$$

Суммарный тепловой поток  $\Sigma Q = -FK(T - T_n)$

Подстановка в исходное уравнение

$$C \frac{dT}{d\tau} = FK (T_n - T)$$

$$\frac{C}{FK} \frac{dT}{d\tau} = T_n - T$$

Обозначим постоянную времени

$$\tau_0 = \frac{C}{FK} = \frac{1 \cdot 10^8}{250 \cdot 1} = 400000 \text{ с или } 111 \text{ часов}$$

Тогда уравнение примет вид

$$\tau_0 \frac{dT}{d\tau} = T_n - T$$

Обозначим

$$\Theta = T - T_n$$

$$\frac{d\Theta}{d\tau} = \frac{dT}{d\tau}$$

Тогда

$$\tau_0 \frac{d\Theta}{d\tau} = -\Theta$$

Разделяем переменные

$$\frac{d\Theta}{\Theta} = -\frac{d\tau}{\tau_0}$$

Интегрируем

$$\ln \Theta = -\frac{\tau}{\tau_0} + C_1$$

Преобразуем

$$e^{\ln \Theta} = e^{-\frac{\tau}{\tau_0} + C_1}$$

$$\Theta = Ce^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$$

$$T - T_n = Ce^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$$

$$T = T_n + Ce^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$$

Подставляем начальные условия

$$T_0 = T_n + Ce^{-\frac{0}{\tau_0}}$$

$$C = T_0 - T_n = 25 - (-40) = 65^\circ\text{C}$$

Окончательно зависимость изменения температуры компонента

$$T = T_n + Ce^{-\frac{\tau}{\tau_0}} = -40 + 65e^{-\frac{\tau}{400000}}$$

В случае, когда требуется охлаждение до температуры  $T_1 = +15^\circ\text{C}$

$$15 = -40 + 65e^{-\frac{\tau}{400000}}$$

$$55 = 65e^{-\frac{\tau}{400000}}$$

$$11/13 = e^{-\frac{\tau}{400000}}$$

$$\tau = -400000 \ln(11/13) \approx 66822 \text{ с или } 18.56 \text{ часа}$$

**Ответ:**

$$\tau \approx 66822 \text{ с} = 18.56 \text{ часа}$$



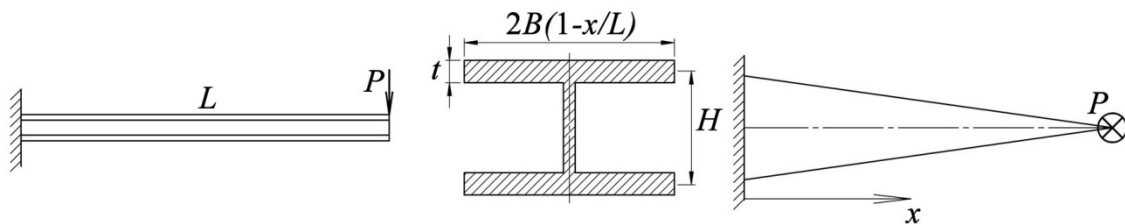
### Критерии оценивания (max 14 баллов)

- Записано уравнение теплопередачи (+1 балла)
- Записано соотношение для суммарного теплового потока (max +2 балла)
- Получена зависимость для определения температуры компонента (max +8 баллов)
- Учтены начальные условия (max +2 баллов)
- Получен правильный результат (+1 балл)

### 8. Сопротивление материалов

Консольная балка длиной  $L$  нагружена силой  $P$  на свободном крае (рисунок слева). Поперечное сечение балки представлено на рисунке. Площади верхнего и нижнего фланца равны  $B \cdot t$  ( $B \gg t$ ). Вкладом в момент инерции  $I$  площади среднего участка можно пренебречь ( $H \gg t$ ). При действующей нагрузке  $P$ , отклонение свободного конца составляет  $\delta_1 = PL^3 / 3EI$ , где  $I = 2Bt(H/2)^2$ .

Так как данное отклонение слишком большое, было решено изменить конструкцию балки, в соответствии с моделью, приведённой на рисунке справа (вид на балку сверху). Материал был добавлен таким образом, чтобы масса осталась прежней. Высота  $H$  осталась прежней, а ширина фланцев  $B(x) = 2B(1 - x/L)$



Какое отклонение  $\delta_2$  будет у свободного края новой балки при воздействии силой  $P$ ? На сколько процентов оно изменилось по сравнению с  $\delta_1$ ?

#### Решение

Дифференциальное уравнение балки

$$-EI(x)w''(x) = M(x),$$

$$\text{где } M(x) = -PL\left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad I = BtH^2\left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

Тогда

$$w''(x) = \frac{-M(x)}{EI} = \frac{PL(1 - x/L)}{EBtH^2(1 - x/L)} = \frac{PL}{EBtH^2}.$$

Проинтегрируем данное уравнение два раза.

$$w'(x) = \frac{PL}{EBtH^2}x + C_1$$

$$w(x) = \frac{PL}{2EBtH^2}x^2 + C_1x + C_2$$

Подставив граничные условия, можно найти неизвестные  $C_1, C_2$ :

$$\text{ГУ1: } w(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$\text{ГУ2: } w'(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

Таким образом отклонение свободного края равно

$$\delta_2 = w(L) = \frac{PL^3}{2EBtH^2}$$

Сравнение с  $\delta_1$  показывает, что уменьшение отклонения составило 25%

$$\delta_1 = \frac{2PL^3}{3EBtH^2}$$

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = 75\%$$

Ответ:

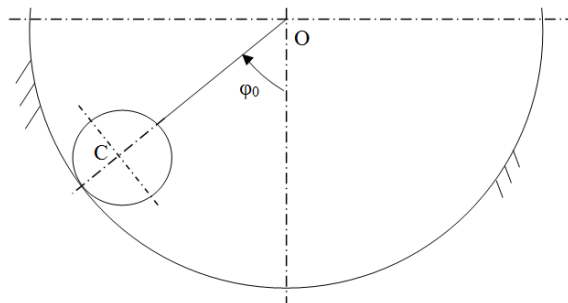
$$\delta_1 = \frac{2PL^3}{3EBtH^2}, \frac{\delta_2}{\delta_1} = 75\%$$

### Критерии оценивания (max 14 баллов)

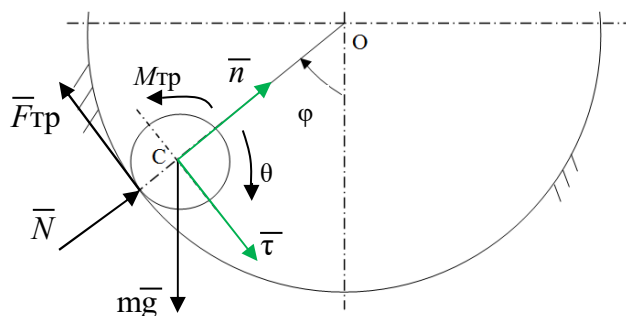
- Записано уравнение балки (max +5 баллов)
- Правильно проведено интегрирование и найдены неизвестные константы интегрирования (max +4 балла)
- Правильно определено  $\delta_1$  (max +3 балла)
- Правильно определено соотношение  $\delta_2 / \delta_1$  (max +2 балла)

### 9. Теория колебаний

Сплошной однородный цилиндрический каток радиуса  $r$  начинает скатываться без проскальзывания по цилиндрической выемке радиуса  $R = 3r$  в вертикальной плоскости без начальной скорости. Известно, что коэффициент трения качения равен  $\delta$ . В начальный момент времени угол  $\varphi$  был равен  $\varphi_0$ . Не решая задачу Коши, получить общий вид функции, описывающей изменение скорости центра катка  $C$  в зависимости от угла  $\varphi$ .



### Решение



1. Уравнение движения центра масс катка (точка  $C$ )

$$m\bar{a}_c = \bar{N} + \bar{F}_{mp} + m\bar{g}$$

В проекции на нормаль в естественных координатах

$$\frac{1}{R-r}mv_c^2 = N - mg \cdot \cos\varphi$$

Откуда:

$$N = \frac{1}{2r}mv_c^2 + mg \cdot \cos\varphi$$

2. Кинетическая энергия катка (теорема Кёнига):

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_{cz}\omega^2 = \frac{3}{4}mv_c^2$$

3. Элементарная работа

$$dA = mg \cdot \sin\varphi dS_c - \delta N d\theta$$

Здесь  $d\theta$  – элементарный угол поворота катка относительно осей Кёнига, связанных с центром масс катка.

Так как

$$\begin{aligned}v_c &= -(R-r)\varphi, \\dS_c &= -(R-r)d\varphi, \\d\theta &= -\frac{R-r}{r}d\varphi,\end{aligned}$$

то теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме имеет вид

$$d\left(\frac{3}{4}mv_c^2\right) = -(R-r)mg \cdot \sin\varphi d\varphi - \delta\left(\frac{1}{2r}mv_c^2 + mg \cdot \cos\varphi\right)\left(-\frac{R-r}{r}\right)d\varphi$$
$$p = v_c^2$$

$$\frac{3}{4} \frac{dp}{d\varphi} - \frac{\delta}{r} p = 2\delta g \cdot \cos\varphi - 2gr \cdot \sin\varphi$$

Уравнение имеет известное решение вида

$$v_c^2 = p = C_1 e^{\lambda\varphi} + A \cos\varphi + B \sin\varphi$$

**Ответ:**

$$v_c^2 = p = C_1 e^{\lambda\varphi} + A \cos\varphi + B \sin\varphi$$

### **Критерии оценивания (max 15 баллов)**

- правильно показаны силы и моменты, действующие на механическую систему (+1 балл)
- правильно записана кинетическая энергия и элементарная работа (или аналогичные вычисления при решении другим методом) (max +2 балла)
- правильно составлены кинематические связи в механической системе (+1 балл)
- правильно составлено дифференциальное уравнение (max +2 балла)
- правильно получен общий вид функции, описывающей изменение скорости центра катка С в зависимости от угла  $\varphi$  (max +4 балла)