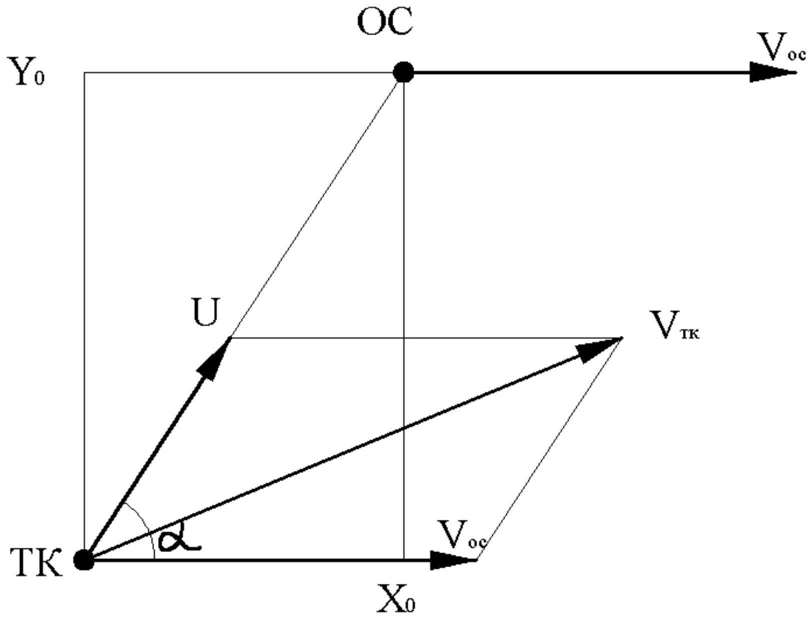
Олимпиада «Я – профессионал»

ОСВОЕНИЕ КОСМОСА

Заключительный (очный) этап
для студентов специалитета и магистратуры

Билет состоит из **9 заданий**. На все вопросы заданий необходимо дать полный развёрнутый ответ, все приведённые утверждения должны быть максимально обоснованы, решения – максимально подробны. На решение всех заданий билета отводится **240 минут**.

1. **Проектирование/конструирование КЛА**
Осуществляется параллельное сближение (самонаведение) транспортного корабля и орбитальной станции (промах дальнего наведения равен нулю). Скорость орбитальной станции 8.0 км/с, скорость транспортного корабля 8.1 км/с. Скорость станции направлена по оси OX. Координаты станции в начальный момент времени $x_0 = 100$ м, $y_0 = 200$ м. Скорость в конце самонаведения (скорость причаливания) считать малой. Определить массу топлива, необходимого для реализации манёвра самонаведения. Массу корабля без учёта этой части топлива считать равной 5 т. В расчетах принять $I_{\text{уд}} = 3000$ м/с, весовые коэффициенты для определения массы конструкции $\gamma_{\text{к}} = 0.1$, для определения массы баков $\gamma_{\text{б}} = 0.13$. Сделать поясняющий рисунок.
Решение
Расчётная схема



Угол между вектором U и осью OX.

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

Относительная скорость U

$$U^2 + v_{\text{ос}}{}^2 + 2U\ v_{\text{ос}}\ \cos(\alpha) = v_{\text{ТК}}{}^2$$

$$U = \frac{-2\ v_{\text{ос}} \cos(\alpha) + \sqrt{(2v_{\text{ос}} \cos(\alpha))^2 - \left(1 - v_{\text{ТК}}{}^2 - v_{\text{ос}}{}^2\right)}}{2}$$

Скорость U необходимо погасить полностью.

$$U = I_{\text{уд}} \ln\left(\frac{M_0}{M_0 - M_{\text{Т}}}\right)$$

Здесь:

Полная масса транспортного корабля:

$$M_0 = M_б + M_{ТК} + M_к + M_Т$$

$M_{ТК}$ – масса транспортного корабля без топлива на самонаведение.

Масса баков

$$M_б = \gamma_б M_Т$$

Масса конструкции

$$M_к = \frac{\gamma_к}{1+\gamma_к} M_0$$

$$M_Т = \frac{M_{ТК}\left(1 - e^{\frac{U}{I_{уд}}}\right)}{\gamma_б e^{\frac{U}{I_{уд}}} + \frac{\gamma_к}{1+\gamma_к} e^{\frac{U}{I_{уд}}} - \gamma_б - 1 - \frac{\gamma_к}{1+\gamma_к}}$$

Ответ:

$$M_Т = \frac{M_{ТК}\left(1 - e^{\frac{U}{I_{уд}}}\right)}{\gamma_б e^{\frac{U}{I_{уд}}} + \frac{\gamma_к}{1+\gamma_к} e^{\frac{U}{I_{уд}}} - \gamma_б - 1 - \frac{\gamma_к}{1+\gamma_к}}$$

Критерии оценивания (max 8 баллов)

- Составлена расчётная схема (max +3 балла)
- Получено соотношение для определения относительной скорости (max +2 балла)
- Получено соотношение для определения массы топлива (max +3 балла)

2. **Проектирование КЛА/Технико-экономический анализ**

Вновь организуемая фирма «Космический извозчик» решила в очередной раз реализовать схему космического челнока для доставки людей и грузов на околоземные станции.

Учитывалось, что определённая часть концептуальных, проектных и технологических решений по изделиям «Шаттл» и «Буран» стала общеизвестной, опубликована в открытой печати и может быть использована.

По расчетам специалистов фирмы:

- грузоподъемность нового изделия должна составить P [кг];
- рыночная стоимость заказа на один кг доставляемого на орбиту груза составляет $PR_{кг}$ [денежных единиц (д.е.)];
- коэффициент загрузки космического челнока K [безразмерная величина]: не всегда можно ждать, пока загрузка челнока составит 100%;
- научно-конструкторская разработка нового космического челнока будет стоить $S_{разраб}$ [д.е.];
- изготовление челнока будет стоить $S_{изгот}$ [д.е.];
- накладные расходы проекта $S_{накл}$ [д.е.];
- продолжительность рейса составит $T_{рейс}$ [дней];
- срок службы космического челнока составит $T_{службы}$ [лет];
- минимальное время технического обслуживания между рейсами $T_{мин.межрейс}$ [дней];
- стоимость рейса составит $S_{рейс}$ [д.е.];
- стоимость межрейсового обслуживания составит $S_{межрейс}$ [д.е.].

Определить общие затраты на проект и общую выручку от реализации проекта, а также точку безубыточности проекта по количеству заказов на пуски (по количеству запусков) при изготовлении космического челнока в единственном экземпляре. Дать краткий анализ результата.

Решение

Точка безубыточности (CVP / BEP (cost-volume-profit / break-even point) в данном случае – это количество реализуемых заказов, при котором расходы будут компенсированы доходами, а при реализации каждого последующего заказа предприятие начинает получать прибыль.

Определим общие затраты на проект и общую выручку от реализации проекта при заявленном сроке службы челнока для количества полетов N.

Общие затраты за все время эксплуатации челнока:

$$S_{\text{общ}} = S_{\text{разраб}} + S_{\text{изгот}} + S_{\text{накл}} + \left(S_{\text{рейс}} + S_{\text{межрейс}}\right) N.$$

Общая выручка за все время эксплуатации челнока:

$$PR_{\text{общ}} = PR_{\text{кг}} PKN.$$

Определим точку безубыточности проекта по количеству запусков челнока $N_{безубыт}$, приравняв общие затраты и общую выручку проекта:

$$N_{\text{безубыт}} = \frac{S_{\text{разр}} + S_{\text{межрейс}} + S_{\text{накл}}}{PR\,P\,K - S_{\text{рейс}} - S_{\text{межрейс}}}$$

Если точка безубыточности выходит за пределы максимального количества пусков $N_{макс}$, допускаемого техническим ресурсом челнока

$$N_{\text{макс}} = \frac{T_{\text{службы}}}{T_{\text{рейс}} + T_{\text{мин}} S_{\text{межрейс}}},$$

то проект оказывается убыточным. В этом случае следует либо отказаться от его реализации, либо найти альтернативные концептуальные, технические, технологические решения и повторить расчет.

Ответ:

Точка безубыточности проекта по количеству запусков челнока

$$N_{\text{безубыт}} = \frac{S_{\text{разр}} + S_{\text{межрейс}} + S_{\text{накл}}}{PR\,P\,K - S_{\text{рейс}} - S_{\text{межрейс}}}$$

Если точка безубыточности выходит за пределы максимального количества пусков $N_{макс}$, допускаемого техническим ресурсом челнока

$$N_{\text{макс}} = \frac{T_{\text{службы}}}{T_{\text{рейс}} + T_{\text{мин}} S_{\text{межрейс}}},$$

то проект оказывается убыточным. В этом случае следует либо отказаться от его реализации, либо найти альтернативные концептуальные, технические, технологические решения и повторить расчет.

Критерии оценивания (max 8 баллов)

- Правильно записано соотношение для вычисления общих затрат за все время эксплуатации челнока (+1 балл)
- Записано соотношение для вычисления общей выручки (max +2 балла)
- Определена точка безубыточности проекта по количеству запусков челнока (max +2 балла)
- Проведён анализ полученного результата (max +3 балла)

3. Проектирование двигательных установок КЛА

Найти и доказать, при каком соотношении давлений на срезе сопла p_a и окружающей среды $p_н$ реализуется максимальная тяга ракетного двигателя при условии постоянства давления внутри камеры сгорания $p_к$ = const?

Решение

Используем формулу для расчета тяги ракетного двигателя в виде

$$P = \dot{m} \cdot w_a + \left(p_a - p_н\right) \cdot F_a.$$

Для определения максимума функции надо взять первую производную и приравнять её к нулю.

Условие задачи $p_к = const$ приводит к условию постоянства секундного массового расхода топлива $\dot{m}$. Тогда с учетом уравнения неразрывности выражение для определения тяги преобразуем к виду

$$P = \dot{m} \cdot \left(w_a + \frac{(p_a - p_н) \cdot F_a}{\dot{m}} \right).$$

Учитывая, что

$$\dot{m} = \rho_a \cdot w_a \cdot F_a$$

получим

$$P = \dot{m} \cdot \left(w_a + \frac{(p_a - p_н)}{\rho_a \cdot w_a} \right).$$

Возьмем первую производную по переменной p_a:

$$\frac{dP}{dp_a} = \frac{d}{dp_a} \cdot \left[w_a + \frac{(p_a - p_н)}{\rho_a \cdot w_a} \right] = \frac{dw_a}{dp_a} + \frac{1 \cdot \rho_a \cdot w_a - (p_a - p_н)}{(\rho_a \cdot w_a)^2} =$$

$$= \frac{dw_a}{dp_a} + \frac{1}{\rho_a \cdot w_a} - \frac{(p_a - p_н)}{\rho_a \cdot w_a^2} \cdot \frac{d\rho_a \cdot w_a}{dp_a}.$$

Используем уравнение Бернулли в дифференциальном виде

$$dp + \rho \cdot w \cdot dw = 0;$$

$$\rho \cdot w \cdot dw = -dp;$$

$$\frac{dw}{dp} = -\frac{1}{\rho \cdot w}.$$

Для среза сопла это выражение примет вид:

$$\frac{dw_a}{dp_a} = -\frac{1}{\rho_a \cdot w_a}.$$

Подставим в уравнения тяги и сокращая получаем

$$\frac{dP}{dp_a} = -\frac{(p_a - p_н)}{(\rho_a \cdot w_a)^2} \cdot \frac{d(\rho_a \cdot w_a)}{dp_a}.$$

Приравняем $\frac{dP}{dp_a}$ к нулю

$$\frac{(p_a - p_н)}{(\rho_a \cdot w_a)^2} \cdot \frac{d(\rho_a \cdot w_a)}{dp_a} = 0, \text{ т.к. } \rho_a \neq 0,\ w_a \neq 0 \rightarrow dp_a \neq 0,\ d(\rho_a \cdot w_a) \neq 0.$$

Значит $p_a - p_н = 0$, т.е. при $p_a = p_н \rightarrow \frac{dP}{dp_a} = 0.$

Для определения характера экстремума необходимо найти вторую производную. Однако если бы это был минимум, то при $p_a > p_н$ и при $p_a < p_н$ тяга увеличивалась бы, причем до неопределенной величины, что невозможно.

Таким образом, режим работы сопла, при котором $p_a = p_н$ называется расчётным. При этом:

$$p_a = p_{a\,расч};$$

$$F_a = F_{a\,расч};$$

$$P = P_{расч} = P_{\max}.$$

Ответ:

$p_a = p_н$.

Критерии оценивания (max 10 баллов)

- Правильно записана формула для тяги ракетного двигателя (+1 балл).
- Взята производная dP / dp_a (max +2 балла)
- Приведено или получено соотношение $p_a = p_н$, для которого реализуется максимальная тяга ракетного двигателя (max +3 балла)

– Приведено доказательство того, что максимальная тяга ракетного двигателя реализуется при $p_a = p_н$ (max +4 балла)

4. Баллистика

В некоторой части Вселенной точка М массой *m* движется вокруг неподвижного центра О под действием центральной (имеющей только радиальную составляющую) силы *F*. Эта сила является некоторой функцией расстояния ОМ. Известно, что скорость точки изменяется по закону $V = q/r$ где q – постоянная величина, r – расстояние ОМ. Найти величину силы F и траекторию движения точки.

Примечание: формулы, определяющие радиальную и трансверсальную составляющие полного ускорения точки, имеют вид:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \qquad a_t = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$$

Решение

Для определения действующей силы $F = F_{r0}$ воспользуемся формулой $F_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)$, в которую следует подставить значения ускорений $\ddot{r}$ и $r\dot{\varphi}^2$. Эти величины определим из интеграла площадей $r^2\dot{\varphi} = c$ и через формулу разложения скорости в полярных координатах, т.е. $V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \left(\frac{q}{r}\right)^2$. Запишем вспомогательные соотношения:

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}, \; r\dot{\varphi}^2 = \frac{c^2}{r^3}, \; \dot{r}^2 = \frac{q^2 - c^2}{r^2}, \; \ddot{r} = \frac{c^2 - q^2}{r^3}.$$

Подставляя их в формулу для центральной силы, получим её величину

$$F = F_r = m\left[\frac{c^2 - q^2}{r^3} - \frac{c^2}{r^3}\right] = -\frac{mq^2}{r^3} < 0.$$

Отсюда видно, что действующая сила является силой притяжения обратно пропорциональной кубу расстояния до точки. Трансверсальная проекция силы равна нулю:

$$F_t = m\left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right) = 0,$$

где $r\ddot{\varphi} = -\frac{2c\dot{r}}{r^2}, \; 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{2c\dot{r}}{r^2}.$

Траекторию точки под действием силы F найдём, исключая время с помощью соотношений:

$$\frac{rdr}{\sqrt{q^2 - c^2}} = dt, \; \frac{r^2}{c}d\varphi = dt,$$

которые следуют непосредственно из $\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}, \; r\dot{\varphi}^2 = \frac{c^2}{r^3}, \; \dot{r}^2 = \frac{q^2 - c^2}{r^2}, \; \ddot{r} = \frac{c^2 - q^2}{r^3}$. Теперь

$$\frac{dr}{r} = \frac{\sqrt{q^2 - c^2}}{c}d\varphi.$$

Интегрируя обе части последнего равенства, получаем

$$\ln r = \frac{\sqrt{q^2 - c^2}}{c}\varphi + C, \; C = \ln r_0.$$

Таким образом, множеством возможных траекторий оказывается семейство логарифмических спиралей

$$r = r_0 e^{\lambda\varphi}, \; \lambda = \sqrt{\frac{q^2}{c^2} - 1} = const > 0,$$

где c – интеграл площадей. Движение возможно при $q > c$.

Ответ:

1. $\bar{F} = \bar{F}_r; \; F_r = -\frac{mq^2}{r^3}$

2. Множество возможных траекторий– семейство логарифмических спиралей

$$r = r_0 e^{\lambda\varphi},\ \lambda = \sqrt{\frac{q^2}{c^2} - 1} = const > 0,$$

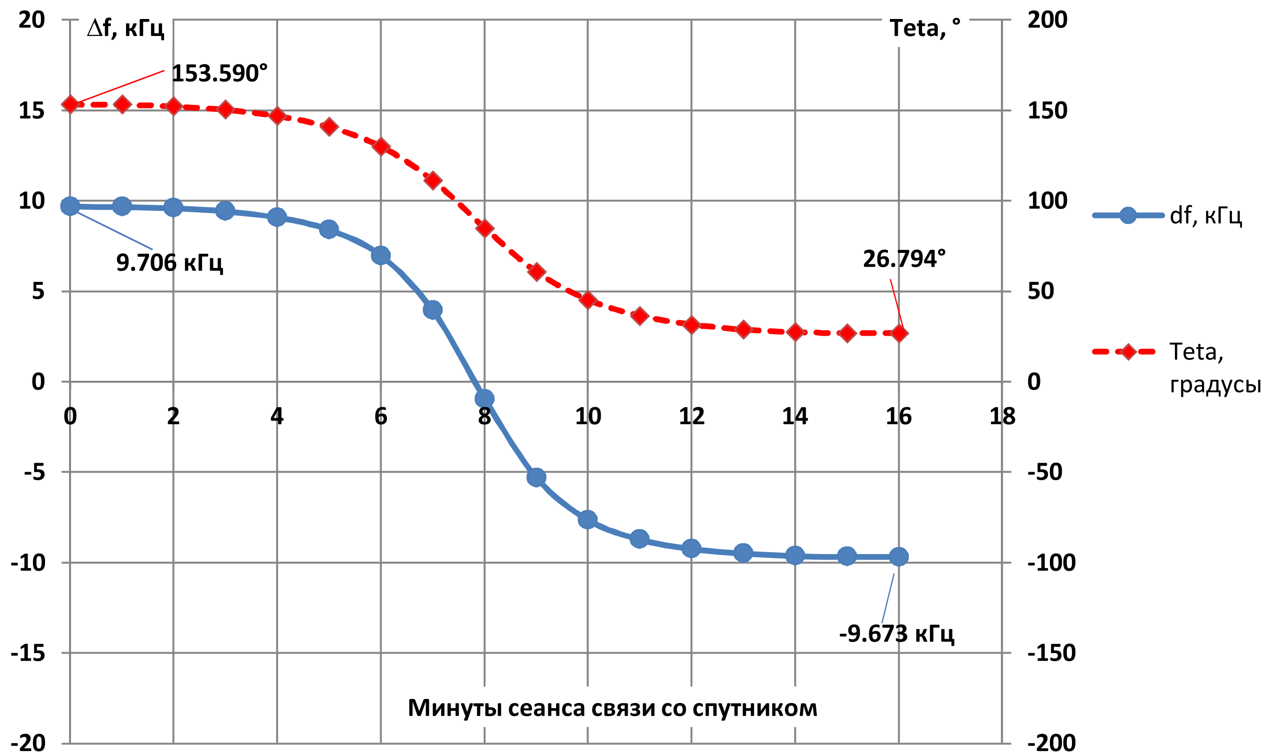
где c – интеграл площадей. Движение возможно при $q > c$.

Критерии оценивания (max 12 баллов)

– Записаны вспомогательные соотношения (max +4 балла)
– Записано соотношение трансверсальной проекции силы (max +2 балла)
– Записано соотношение для результатов интегрирования (max + 2 балла)
– Сделан вывод об образовании спирали в пространстве (max +4 балла)

5. Баллистика/Теория управления

В Центре управления полётом малых космических аппаратов проводился сеанс связи со спутником, передающим данные на частоте f_0 = 436.8475 МГц. Спутник движется по околокруговой низкой орбите. Разница Δf между фактической частотой приёма в ЦУП и частотой передачи на борту показана на рисунке с шагом в 1 минуту. На этом же рисунке показан угол θ, который образует вектор скорости спутника относительно приёмника с направлением на этот спутник.



а) Объяснить характер изменения величины Δf.

б) Принимая скорость распространения электромагнитных волн c = 300 000 км/с и средний радиус Земли R = 6371 км, определить высоту орбиты спутника над Землёй.

Решение

а) Частоты передачи и приёма отличаются из-за эффекта Доплера. Основное уравнение

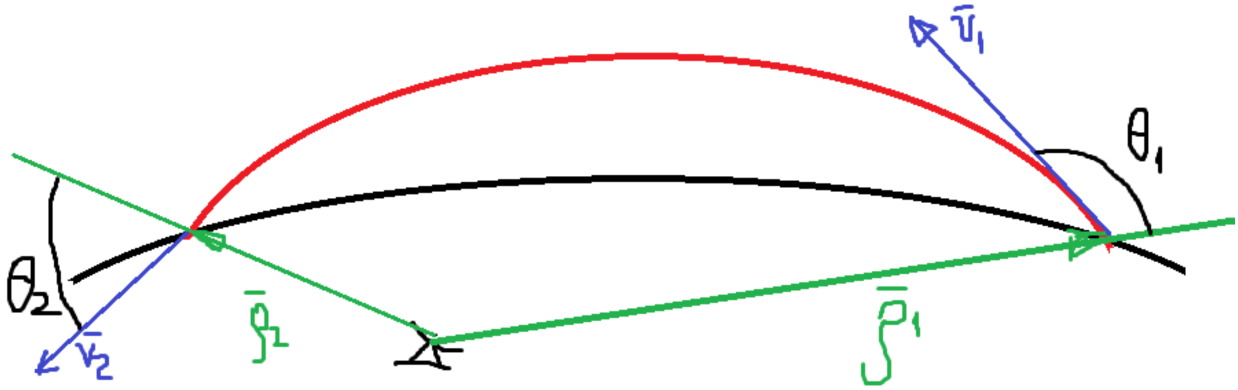
$$f = f_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta}$$

Скорость спутника много меньше скорости распространения э/м волн, поэтому можно эту формулу упростить:

$$f = f_0 \frac{1}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta}$$

Скорость наземного пункта в Москве, вызванная вращением Земли примерно равна 260 м/с. Скорость спутника на низкой круговой орбите может изменяться от 6.7 км/с до 7.79 км/с. То есть абсолютная скорость источника в 25-30 раз больше абсолютной скорости приёмника. Поэтому будем считать, что приёмник неподвижен.

Тогда Θ – угол между абсолютной скоростью спутника и направлением на него из ЦУП. При выходе из-за горизонта этот угол всегда тупой, частота приёма больше номинальной. Угол постоянно уменьшается, в области наибольшего возвышения спутника над горизонтом частоты равны. Далее угол становится острым и частота приёма меньше номинальной.



б)

Так как $f = f_0 + df$, то для двух крайних точек, показанных на рисунке, можно записать:

$$\begin{cases} 1+\dfrac{v}{c}\cos\theta_1 = \dfrac{f_0}{f_1} \\ 1+\dfrac{v}{c}\cos\theta_2 = \dfrac{f_0}{f_2} \end{cases}$$

$$\frac{v}{c}\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right) = f_0\left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2}\right)$$

$v = 7.442$ км/с

$$h = \frac{398600.44}{v^2} - 6371 = 826 \text{ км}$$

Ответ:

а) При выходе из-за горизонта этот угол всегда тупой, частота приёма больше номинальной. Угол постоянно уменьшается, в области наибольшего возвышения спутника над горизонтом частоты равны. Далее угол становится острым и частота приёма меньше номинальной.

б) $h = \dfrac{398600.44}{v^2} - 6371 = 826$ км

Критерии оценивания (max 12 баллов)

- Приведена формула, описывающая эффект Доплера (max +2 балла)
- Введены необходимые допущения для упрощения объяснения (или приведены аналогичные рассуждения, позволяющие получить прямую зависимость частоты приёма от положения спутника относительно наземного пункта) (max +3 балла)
- Объяснена динамика изменения частоты (max +2 балла)
- Составлена система уравнений при ответе на пункт б (max +3 балла)
- Получен правильный ответ в пункте б (max +2 балла)

6. Проектирование конструкций из композиционных материалов

Определить оптимальное содержание армирующих волокон c_f в прямоугольной композитной пластине массы m, армированной стеклянными волокнами в одном направлении, обеспечивающей максимальную цилиндрическую жесткость пластины, если модуль упругости волокна $E_f = 74$ ГПа, плотность волокна $\rho_f = 2.5$ г/см^3, модуль упругости матрицы $E_m = 4$ ГПа, плотность матрицы $\rho_m = 1.2$ г/см^3.

Решение

Обозначим ширину и длину пластины соответственно b и a, тогда её толщину можно выразить соотношением

$$h = \frac{m}{ab\left(c_f\rho_f + \left(1-c_f\right)\rho_m\right)} \tag{1}$$

Жесткость пластины с точностью до коэффициента, зависящего от коэффициента Пуассона композита, определяется соотношением

$$D = E_k h^3, \tag{2}$$

где $E_k = E_f\rho_f + \left(1-c_f\right)E_m$ – усредненный модуль упругости композита.

Преобразуем выражение для жесткости, подставив в (2) значение h из (1). В результате получим формулу, определяющую зависимость жесткости D от c_f:

$$D = \left(\frac{m}{ab}\right)^3 \frac{\left(E_f\rho_f + \left(1-c_f\right)E_m\right)}{\left(c_f\rho_f + \left(1-c_f\right)\rho_m\right)^3}. \tag{3}$$

Оптимальное содержание волокна c_f в пластине найдем, используя необходимое условие экстремума для функции $D = D\left(c_f\right)$:

$$\frac{dD\left(c_f\right)}{dc_f} = 0.$$

Произведя дифференцирование и приравняв к нулю, полученное выражение, получим соотношение, определяющее оптимальное содержание волокна в композитной пластине:

$$c_f = \frac{\rho_m}{2\left(\rho_f - \rho_m\right)} - \frac{3}{2}\frac{E_m}{E_f}. \tag{4}$$

Подставляя в (4) заданные значения характеристик, окончательно получим

$$c_f = 0{,}44.$$

Ответ:

$c_f = 0{,}44.$

Критерии оценивания (max 8 баллов)

- Записано соотношение для толщины пластины (1) (max +2 балла)
- Записано соотношение для жёсткости пластины (2) (max +2 балла)
- Получено соотношение для определения оптимального содержание волокна c_f (4) (max +3 балла)
- Правильно вычислено значение c_f (+1 балл)

7. **Тепловые режимы КЛА**

Теплоизолированная ёмкость с компонентом ракетного топлива массой M = 110 т и теплоёмкостью C_p = 2 кДж/(кг·К) с начальной температурой T_0 = 40°С, равной температуре окружающей среды, подготавливается по температуре внешним термостатированием с помощью теплообменника площадью теплообмена f = 10 м^2 и температурой кипения фреона T_f = -60°С. Ёмкость вместе с контуром теплоносителя стоит под навесом, защищающим от солнечного излучения, и покрыта теплоизоляцией общей площадью F = 200 м^2 с коэффициентом теплоотдачи K = 1 Вт/(м^{2}К). За какое время компонент охладится до температуры T_1 = -30°С, если коэффициент теплоотдачи в теплообменнике составляет k = 200 Вт/(м^{2}К), а мощность насоса составляет N = 2 кВт. Теплоёмкостью ёмкости и контура термостатирования пренебречь.

Решение

Полная теплоёмкость ёмкости с компонентом

$$C = M{\cdot}C_p = 110000{\cdot}2000 = 2.2{\cdot}108\,\text{Дж/К}$$

Дифференциальное уравнение теплопередачи в системе (T – температура компонента, τ – время)

$$C\frac{dT}{d\tau}=\Sigma Q$$

Суммарный тепловой поток $\Sigma Q=N+FK\left(T_0-T\right)-fk\left(T-T_f\right)$

Подстановка в исходное уравнение

$$C\frac{dT}{d\tau}=N+FK\left(T_0-T\right)-fk\left(T-T_f\right)$$

$$C\frac{dT}{d\tau}=N+FKT_0+fkT_f-\left(FK+fk\right)T$$

$$\frac{C}{FK+fk}\frac{dT}{d\tau}=\frac{N+FKT_0+fkT_f}{FK+fk}-T$$

Обозначим асимптотическое значение температуры

$$T_\infty=\frac{N+FKT_0+fkT_f}{FK+fk}=\frac{2000+200\cdot1\cdot40+10\cdot200\cdot\left(-60\right)}{200\cdot1+10\cdot200}=-50\ ^{\circ}\mathrm{C}$$

Обозначим постоянную времени

$$\tau_0=\frac{C}{FK+fk}=\frac{2,2\cdot10^8}{200\cdot1+10\cdot200}=100000\text{ с или 27.8 часа}$$

Тогда уравнение примет вид

$$\tau_0\frac{dT}{d\tau}=T_\infty-T$$

Обозначим

$$\Theta=T-T_\infty$$

$$\frac{d\Theta}{d\tau}=\frac{dT}{d\tau}$$

Тогда

$$\tau_0\frac{d\Theta}{d\tau}=-\Theta$$

Разделяем переменные

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\Theta}=-\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau_0}$$

Интегрируем

$$\ln\Theta=-\frac{\tau}{\tau_0}+C_1$$

Преобразуем

$$e^{\ln\Theta}=e^{-\frac{\tau}{\tau_0}+C_1}$$

$$\Theta=Ce^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$$

$$T-T_\infty=Ce^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$$

$$T=T_\infty+Ce^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$$

Подставляем начальные условия

$$T_0=T_\infty+Ce^{-\frac{0}{\tau_0}}$$

$$C=T_0-T_\infty=40-\left(-50\right)=90\ ^{\circ}\mathrm{C}$$

Окончательно зависимость изменения температуры компонента

$$T=T_\infty+Ce^{-\frac{\tau}{\tau_0}}=-50+90e^{-\frac{\tau}{100000}}$$

В случае, когда требуется охлаждение до температуры T_1=-30°С

$$-30 = -50 + 90e^{-\frac{\tau}{100000}}$$

$$20 = 90e^{-\frac{\tau}{100000}}$$

$$2/9 = e^{-\frac{\tau}{100000}}$$

$$\tau = -100000\ln\left(2/9\right) \approx 150408 \text{ с или } 41.8 \text{ часа}$$

Ответ:

$$\tau \approx 150408 \text{ с} = 41.8 \text{ ч}$$

Критерии оценивания (max 14 баллов)

- Записано уравнение теплопередачи (+1 балл)
- Записано соотношение для суммарного теплового потока (max +2 балла)
- Получена зависимость для определения температуры компонента (max +8 баллов)
- Учтены начальные условия (max +2 балла)
- Получен правильный результат (+1 балл)

8. Строительная механика КЛА

Рассматривается элемент конструкции КЛА, который можно считать балкой постоянного квадратного поперечного сечения, шарнирно закрепленной на абсолютно жестком основании и имеющей следующие параметры: модуль упругости E = 7 ГПа, плотность материала γ = 2600 кг/м^3, сторона квадрата поперечного сечения a = 0.005 м, длина балки L = 1 м. Балка нагружена продольной сжимающей силой P = 100 Н., как показано на рис. 1а.

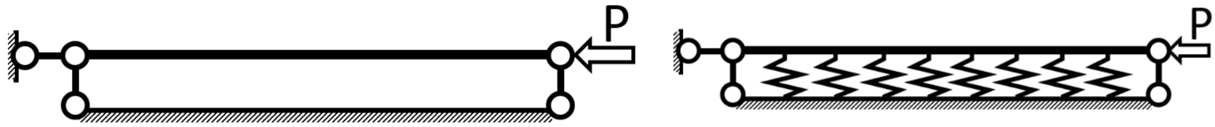


Рис. 1 Расчетные схемы элемента конструкции (а) и применения слоя клея для укрепления балки (б)

Необходимо определить критическую нагрузку для рассматриваемой балки. Если заданная величина сжимающей силы превышает критическую нагрузку, то необходимо определить минимально необходимую жесткость слоя клея, которым балка должна быть соединена с основанием для сохранения несущей способности. Примечание: вводится допущение, что слой клея можно рассматривать как упругое (винклерово) основание, коэффициент постели которого равен C [Па]. Расчётная схема балки, приклеенной к основанию, показана на рис. 1б. Таким образом, необходимо определить (с точностью до 0.1) величину $C_{кр}$>0, начиная с которого сила P = 100 Н не будет вызывать потери устойчивости балки.

Решение

Уравнение поперечных колебаний стержня постоянного сечения, лежащая на упругом основании с учетом продольной силы и демпфирования имеет вид:

$$EJ\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + P\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Cu = 0 \qquad (1)$$

где $u(x,t)$ – прогиб балки, $J = a^4/12$ – момент инерции квадратного сечения, $\rho = \gamma a^2$ – погонная масса балки.

Для шарнирно закрепленной балки граничные условия имеют вид:

$$u(0,t) = 0; u(L,t) = 0, \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0, \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=L} = 0 \qquad (2)$$

Применяя метод Бубнова-Галеркина представим прогиб балки в виде суммы

$$u(x,t) = \sum_{j}^{\infty} W_j(x)\phi_j(t) \qquad (3)$$

где

$$W_j(x) = \sin\frac{j\pi x}{L} \qquad (4)$$

балочная функция для j-того тона колебаний (j=1...∞), удовлетворяющая граничным условиям (2).

Подставляя решение (3) в уравнение (1) и проводя нормализацию

$$\int_0^L \left[EJ\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + P\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Cu \right] W_j dx = 0 \quad \text{(j=1...}\infty\text{)}$$

получим систему уравнений, описывающих динамику обобщенных координат по каждому тону колебаний:

$$\ddot{\phi}_j + \omega_j{}^2\phi_j = 0, \ \text{(j=1...}\infty\text{)}$$

где

$$\omega_j{}^2 = \frac{1}{\rho L^4}(EJ\, j^4\pi^4 + C\, L^4 - PL^2 j^2\pi^2)$$

Критическая нагрузка определяется для низшего тона колебаний j=1 из условия

$$\omega_1{}^2 = \frac{1}{\rho L^4}(EJ\,\pi^4 + C\, L^4 - PL^2\pi^2) = 0 \qquad (5)$$

При отсутствии клеевого слоя (C=0) критическая нагрузка равна

$$P_{кр} = EJ\, L^{-2}\pi^2 = 3{,}598 \approx 3.6\,\text{Н}$$

Таким образом без клеевого слоя балка, нагруженная силой P=100 Н теряет устойчивость. Необходимая жесткость клеевого слоя находится из условия

$$\omega_1{}^2 = \frac{1}{\rho L^4}(EJ\,\pi^4 + C_{\text{кр}}\, L^4 - PL^2\pi^2) = 0$$

что дает

$$C_{\text{кр}} = PL^{-2}\pi^2 - EJL^{-4}\,\pi^4 = 951.447 \approx 951.5 \text{ Па}$$

Ответ:

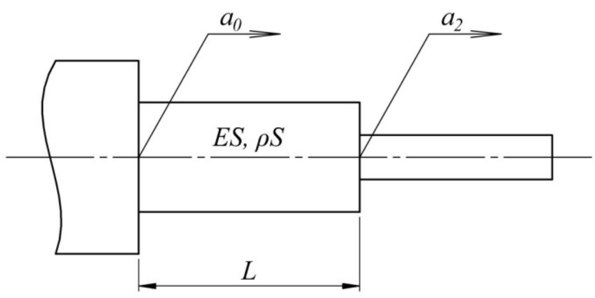
Продольная нагрузка превышает критическую силу $P_{кр}$ = 3.6 Н. Необходимая жесткость клеевого слоя должна быть больше $C_{кр}$ = 951.5 Па.

Критерии оценивания (max 14 баллов)

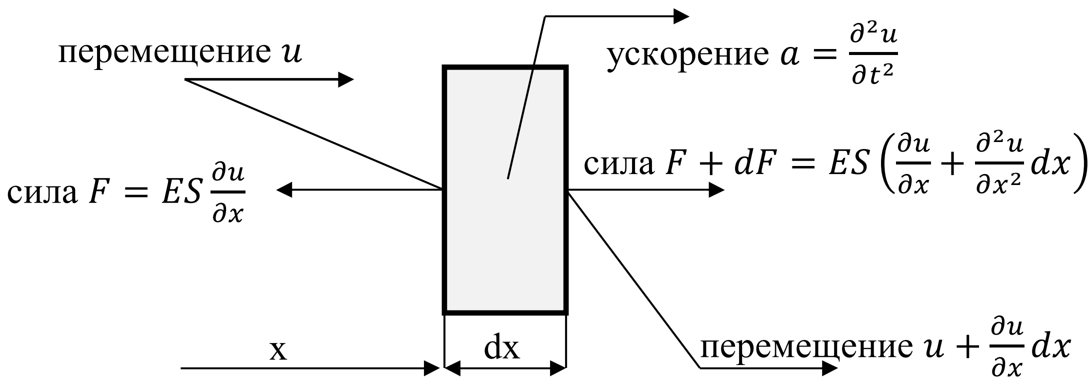
- Составлено уравнение поперечных колебаний (1) и заданы граничные условия (2) (max +4 балла)
- Выбран метод решения задачи и балочная функция (4) (max +3 балла)
- Определено условие потери устойчивости (5) (max +3 балла)
- Найдено числовое значение параметра $P_{\text{кр}}$ (max +2 балла)
- Найдено числовое значение параметра $C_{\text{кр}}$ (max +2 балла)

9. Динамика конструкций КЛА

Определить зависимость амплитуды продольных колебаний a_2 [м/с^2] посадочного места КА на адаптере от круговой частоты ω [рад/с], предполагая массу КА ничтожно малой по сравнению с массой адаптера и носителя, а также предполагая, что адаптер – сплошная балка постоянного поперечного сечения с жёсткостью на растяжение/сжатие ES [Н], постоянной погонной плотностью ρS [кг/м] и длиной L [м]. Амплитуда вынужденных гармонических колебаний основания адаптера зависит от круговой частоты ω следующим образом: $a_0 = k_\omega \omega$, м/с^2. Задачу решить в линейной постановке.



Решение
Элементарный участок:



Если записать второй закон Ньютона ($a = F/m$) для элементарно участка в проекции на ось x, то можно получить уравнение движения элементарного участка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{ES}{\rho S}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Воспользуемся принципом разделения переменных и представим функцию перемещений в виде произведения двух функций:

$$u(x,t) = F(x)G(t).$$

Подстановка в уравнение движения и разделение компонентов, зависящих от координаты и времени, по левой и правой частям даёт следующее уравнение:

$$\frac{ES}{\rho S}\frac{1}{F(x)}\frac{d^2F(x)}{dx^2} = \frac{1}{G(t)}\frac{d^2G(t)}{dt^2}. \tag{2}$$

С учётом того, что левая часть зависит только от координаты, а правая только от времени, решение возможно при выполнении условия

$$\frac{ES}{\rho S}\frac{1}{F(x)}\frac{d^2F(x)}{dx^2} = \frac{1}{G(t)}\frac{d^2G(t)}{dt^2} = -\omega_*^{\,2}.$$

Последовательно можно решить два дифференциальных уравнения и получить:

$$G = G_0\sin(\omega_* t + \varphi_\omega),$$

$$F = F_0(\omega_*)\sin\left(\omega_*\sqrt{\frac{\rho}{E}}x + \varphi_x\right).$$

Так как перемножение G_0 и $F_0(\omega_*)$ даёт одну функцию, зависящую от круговой частоты ω_*, то без потери общности решения можно принять $G_0 = 1$.

Будут справедливы следующие записи для функции перемещений и её производных:

$$u(x,t) = F_0(\omega_*)\sin\left(\omega_*\sqrt{\frac{\rho}{E}}x + \varphi_x\right)\sin(\omega_* t + \varphi_\omega),$$

$$\dot{u}(x,t) = F_0(\omega_*)\omega_*\sin\left(\omega_*\sqrt{\frac{\rho}{E}}x + \varphi_x\right)\cos(\omega_* t + \varphi_\omega),$$

$$\ddot{u}(x,t) = -F_0(\omega_*)\omega_*^2 \sin\left(\omega_*\sqrt{\frac{\rho}{E}}x + \varphi_x\right)\sin(\omega_* t + \varphi_\omega),$$

$$\dot{u}(x,t) = F_0(\omega_*)\omega_*\sqrt{\frac{E}{\rho}}\cos\left(\omega_*\sqrt{\frac{\rho}{E}}x + \varphi_x\right)\sin(\omega_* t + \varphi_\omega).$$

Сформулируем кинематическое граничное условие (по ускорению) на левом краю:

$$\ddot{u}(0,t) = k_\omega \omega \sin(\omega t). \tag{3}$$

Сформулируем силовое граничное условие на правом краю - свободный правый край, массой груза на нём пренебрегаем, сила и деформации на правом краю равны 0:

$$u'(L,t) = 0. \tag{4}$$

Подстановка функции перемещений в условие на правом краю даёт уравнение:

$$k_\omega \omega \sin(\omega t) = -F_0(\omega_*)\omega_*^2 \sin(\varphi_x)\sin(\omega_* t + \varphi_\omega) \tag{5}$$

из которого можно сделать выводы, что $\omega_* = \omega$ и $\varphi_\omega = 0$.

Второе граничное условие даёт уравнение

$$F_0(\omega)\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}\cos\left(\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L + \varphi_x\right)\sin(\omega t) = 0.$$

Выполнение этого условия для любого момента времени возможно при

$$\varphi_x = \frac{\pi}{2} + \pi n - \omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L,$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Найденное значение φ_x можно подставить в граничное условие на левом краю, что позволяет определить

$$F_0(\omega) = -\frac{k_\omega \omega}{\omega^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n - \omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L\right)} = -\frac{k_\omega \omega}{\omega^2 \cos\left(\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L - \pi n\right)}.$$

Подставляя в соотношение для ускорения при x=L, можно получить запись:

$$\ddot{u}(L,t) = \frac{k_\omega \omega}{\cos\left(\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L - \pi n\right)}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)\sin(\omega t),$$

то есть амплитуда на правом краю адаптера

$$a_2 = \frac{k_\omega \omega}{cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}}\omega L\right)} = \frac{k_\omega \omega}{cos\left(-\sqrt{\frac{\rho}{E}}\omega L\right)}.$$

Ответ:

Зависимость амплитуды от круговой частоты: $a_2 = \dfrac{k_\omega \omega}{cos\left(-\sqrt{\frac{\rho}{E}}\omega L\right)}$.

Критерии оценивания (max 14 баллов)

- Записано уравнение движения (1) для элементарного участка (max + 4 балла)
- Применён принцип разделения переменных (2) (+ 1 балл)
- Записаны граничные условия (3) на левом краю (max + 2 балла)
- Определена связь (4) частоты колебаний с формой колебаний адаптера (max + 2 балла)
- Записаны граничные условия (5) на правом краю (max +3 балла)
- Получен правильный ответ (max +2 балла)