2019/20 учебный год

Всероссийская олимпиада студентов «Я – профессионал»

Демонстрационный вариант

задания заключительного (очного) этапа

по направлению «**Физика**»

Категория участия: «Бакалавриат»

(для поступающих в магистратуру)

Олимпиада «Я — профессионал» по физике, заключительный этап

Решения

Вариант для студентов бакалавриата

1Б. Однородный стержень может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. Масса стержня $m = 2$ кг. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают.

1) Найдите ускорение $\vec{a}_c$ центра масс стержня в начальный момент времени.

2) Найдите силу N_1, с которой в этот момент ось действует на стержень.

3) Во сколько раз максимальная сила, с которой стержень действует на ось в процессе движения, больше минимальной?

Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

Решение (Плис В.И.): Из решения задачи **1М**:

1) В начальный момент: $\varphi = \dfrac{\pi}{2}, \quad a_\tau = \dfrac{3}{4} g \sin\varphi = \dfrac{3}{4} g, \quad a_n = 0, \quad \vec{a}_C = \dfrac{3}{4}\vec{g}$,

2) В этот момент $m\vec{a}_c = \dfrac{3}{4} m\vec{g} = m\vec{g} + \vec{N}_1, \; N_1 = \dfrac{mg}{4} = 5\,\text{Н}.$

3) Далее $\dfrac{N\left(\frac{\pi}{2}\right)}{N_1} = \sqrt{1 + 99\cos^2\varphi} = 10.$

Критерии оценивания:

1. Есть уравнение моментов — 2 балла
2. Есть закон сохранения энергии — 2 балла
3. Получена общая зависимость $N(\varphi)$ или $N\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ — 8 баллов
4. Есть $\vec{a}_c = \dfrac{3}{4}\vec{g}$ — 2 балла
5. Есть $N_1 = \dfrac{mg}{4}$ — 2 балла
6. Есть $N_1 = 5\,\text{Н}$ — 2 балла
7. Есть $\dfrac{N\left(\frac{\pi}{2}\right)}{N_1} = \sqrt{1 + 99\cos^2\varphi} = 10$ — 2 балла

Итого: 20 баллов

2Б. Газообразный гелий нагревается от температуры T_0 в процессе, в котором молярная теплоемкость газа зависит от абсолютной температуры T по закону $C(T) = R\dfrac{T}{T_0}$.

1) Найдите температуру T_1, при нагревании до которой газ совершил работу, равную нулю.

2) Вычислите приращение энтропии ΔS при нагревании от T_0 до T_1 в этом процессе.

3) При какой температуре $\tilde{T}$ объем газа в этом процессе был минимальным?

Решение (Плис В.И.): 1) Работа равна нулю, следовательно: $\int\limits_{T_0}^{T_1} C(T)dT = C_V\left(T_1 - T_0\right)$, при $C\left(T\right) = R\dfrac{T}{T_0}$, $C_V = \dfrac{3}{2}R$, это достигается при $T_1 = 2T_0$.

2) Далее: $dS = \dfrac{C(T)dT}{T} = \dfrac{1}{T}R\dfrac{T}{T_0}dT$, тогда $\Delta S = \dfrac{R}{T_0}\int\limits_{T_0}^{T_1} dT = R$.

3) При минимальном объеме $C = C_V$, $R\dfrac{\tilde{T}}{T_0} = \dfrac{3}{2}R$, $\tilde{T} = \dfrac{3}{2}T_0$

Критерии оценивания:

1. Есть 1-е начало термодинамики — 2 балла
2. Есть $\Delta U = C_V\left(T_1 - T_0\right)$ — 2 балла
3. Есть $\int\limits_{T_0}^{T_1} C(T)dT = C_V\left(T_1 - T_0\right)$ — 2 балла
4. Есть $T_1 = 2T_0$ — 2 балла
5. Есть $dS = \dfrac{C(T)dT}{T} = \dfrac{1}{T}R\dfrac{T}{T_0}dT$ — 2 балла
6. Есть $\Delta S = R$ — 2 балла
7. Указано, что при минимальном объёме $C = C_V$ или найдено и продифференцировано $V(T)$ — 4 балла
8. Есть $\tilde{T} = \dfrac{3}{2}T$ — 4 балла

Итого: 20 баллов

3Б. Теплонагревательный элемент (ТЭН) представляет собой тонкий цилиндр (длина $L = 0{,}2$ м, радиус сечения $a = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ м), заполненный проводящим веществом с проводимостью, зависящей от расстояния до оси: $\lambda = c \cdot r^2$, где $c = 1{,}0 \cdot 10^7$ (Ом·м^3)$^{-1}$. Напряжение на ТЭНе $U = 100$ В.

1) Вычислите силу I тока, текущего в нагревателе.

2) Вычислите полное сопротивление R нагревателя.

Решение (Плис В.И.): 1) В однородном длинном проводнике поле $\vec{E}$ однородное, $E=\dfrac{U}{L}=500$ В/м. По закону Ома в локальной форме

$$\vec{j}=\lambda\vec{E},\ \ j=\lambda E=cr^2\frac{U}{L}.$$

2) Ток в проводнике

$$I=\int_S jdS=\int_0^a cr^2\frac{U}{L}2\pi r dr=\frac{cU\pi a^4}{2L}=4{,}9\ \text{А}.$$

3) Сопротивление проводника

$$R=\frac{U}{I}=\frac{2L}{\pi c a^4}=20{,}4\ \text{Ом}.$$

Критерии оценивания:

1. Есть упоминание об однородности поля E — 2 балла
2. $E = U/L$ — 2 балла
3. $j=cr^2\dfrac{U}{L}$ — 2 балла
4. $I=\displaystyle\int_0^a j(r)2\pi r dr$ — 4 балла
5. $I=\dfrac{cU\pi a^4}{2L}$ — 4 балла
6. $R=\dfrac{U}{I}=\dfrac{2L}{\pi c a^4}$ — 2 балла
7. $I=4{,}9$ А (±10%) — 2 балла
8. $R=20{,}4$ Ом (±10%) — 2 балла

Итого: 20 баллов

4Б. СВЧ-антенна радиолокатора (фазированная антенная решетка) устроена следующим образом: вдоль прямой линии на равных расстояниях $d=2{,}5$ см друг от друга расположены $N=100$ излучателей электромагнитных волн длиной $\lambda=2\cdot d$. В дальней зоне ($r_n\gg\lambda$) n-ый излучатель создает волну вида

$$E_n=A_1\cos\left(\omega t-k\,r_n+n\pi\cos\Omega t\right),\quad \Omega<<\omega.$$

1) Найдите число главных максимумов m_{MAX}.

2) Найдите угловую амплитуду θ_{MAX} колебаний направления на главный максимум нулевого порядка («луча»).

3) Найдите угловую ширину $\Delta\theta$ главного максимума нулевого порядка.

Решение (Плис В.И.): Из решения задачи М-4

$$\sin\theta_m=2m+\cos\Omega t.$$

1) $\sin\theta_m\le 1$, тогда $m_{MAX}=0$.

2) Далее $\sin\theta_0=\cos\Omega t$, отсюда $\theta_{MAX}=\dfrac{\pi}{2}$.

3) Угловая ширина максимума $\Delta\theta=2\dfrac{\lambda}{Nd}=\dfrac{4}{N}=0{,}04$ рад, $\Delta\theta\approx 2{,}3^0$.

Критерии оценивания:

1. Записано общее условие на максимум — 6 баллов

   a. Либо получена зависимость для интенсивности от угла в виде $I = A\dfrac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$

   b. Либо получена разность хода из геометрических соображений, при этом необходим рисунок

   И записано условие на максимум: $d\sin(\theta) - \frac{0.5\pi}{2\pi}\cos(\Omega t) = \lambda m$
2. Записано уравнение для максимума порядка m : $\sin(\theta_m) = 2m + 0.5\cos(\Omega t)$ — 1 балл
3. Получено условие m = 0, и указано, что максимум единственный — 1 балл
4. Записано условие на главный максимум $\sin(\theta_{\max}) = 0.5\cos(\Omega t)$ — 2 балла
5. Получено, что $\theta_{\max} = \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ — 2 балла
6. Записано условие на ширину максимума: $Nd\cos(\theta_m)\sin(\Delta\theta_m) = \frac{\lambda}{2}$ или в эквивалентной форме: $kd\sin(\Delta\theta_m)\cos(\theta_m) = \frac{\pi}{N}$. При наличии вывода — 5 баллов, если без вывода, то только 3 балла
7. Записан ответ в виде $\Delta\theta_m = 2\frac{\lambda}{Nd} = \frac{4}{N} = 0.04\,рад$ — 3 балла (1 балл, если нет обоснования, почему $\cos(\theta_m) \approx 1$)

Итого: 20 баллов

5Б. Попав в ядро свинца, τ-лептон может образовать связанное состояние за счет кулоновского взаимодействия с ядром. Причем из-за своей большой массы ($m_\tau = 3477 \cdot m_e$) лептон не будет выходить за пределы ядра. Известно, что при переходе лептона с первого возбужденного уровня такой системы на основной образуется гамма-квант с энергией $E_\gamma = 2{,}59$ МэВ. Считая, что заряд ядра распределен равномерно по объему, определить из приведенных данных его радиус *R*. Заряд τ-лептона такой же, как у электрона.

Решение (Аникин Ю.А.): Электрическое поле внутри однородно заряженного ядра равно

$$\mathbf{E} = \frac{Ze}{R^3}\mathbf{r}$$

Отсюда потенциальная энергия лептона внутри ядра:

$$U(r) = -\frac{3Ze^2}{2R} + \frac{Ze^2}{2R^3}r^2 = const + \frac{m_\tau\omega^2}{2}r^2,$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{Ze^2}{m_\tau R^3}},$$

Это потенциал трехмерного гармонического осциллятора. Он имеет уровни энергии:

$$E_N = const + \hbar\omega\left(N + 3/2\right),\ \ N = 0,1,2,...$$

Энергия гамма-кванта равна расстоянию между уровнями, отсюда $\omega = E_\gamma / \hbar$. Используя предыдущее выражение для ω получим окончательно:

$$R=\sqrt[3]{\frac{Ze^2}{m_\tau\omega^2}}=\sqrt[3]{\frac{Ze^2\hbar^2}{m_\tau E_\gamma^2}}=7,28\cdot10^{-15}\text{ м}$$

Дополнение. Из теории квантово-механического осциллятора известно, что характерный размер орбитали равен

$$a=\sqrt{\frac{\hbar}{m_\tau\omega}}=\sqrt{\frac{\hbar^2}{m_\tau E_\gamma}}=2,9\cdot10^{-15}\text{ м}$$

Таким образом a примерное в 2,5 раза меньше чем R – т.е. предположение о локализации тау-лептона в ядре хорошо оправдано. Время жизни τ-лептона $\tau_{1/2}=2,9\cdot10^{-13}$ с, что много больше «характерного времени оборота» тау-лептона на орбитали $T\sim h/E_\gamma\sim10^{-21}$ с. Время жизни возбужденного состояния можно оценить из полуклассических соображений:

$$\tau_{10}\sim\frac{E_\gamma}{I},I=\frac{2|\ddot{\mathbf{d}}|^2}{3c^3}\sim\frac{e^2\omega^4a^2}{c^3}=\frac{e^2\omega^3\hbar}{m_\tau c^3}=\frac{e^2E_\gamma^3}{m_\tau c^3\hbar^2}\;\Rightarrow\;\tau_{10}\sim\frac{m_\tau c^3\hbar^2}{e^2E_\gamma^2}\sim10^{-17}\text{с}$$

Итак $T\ll\tau_{10}\ll\tau_{1/2}$ т.е. все предположения косвенно сделанные при формулировке задачи и ее решении оправданы.

Альтернативное решение задачи 5 для бакалавров основанное на теории Бора (квазиклассическое решение)

В соответствии с постулатами теории Бора для радиуса n-ой орбиты лептона:

$$\begin{cases}\dfrac{m_\tau\upsilon^2}{r_n}=eE=\dfrac{Ze^2}{R^3}r_n\\ m_\tau\upsilon r_n=n\hbar\end{cases}\;\Rightarrow\;r_n=\left(\frac{n^2\hbar^2}{m_\tau Ze^2}R^3\right)^{1/4}$$

Полная энергия лептона равна

$$E_n=\frac{m\upsilon^2}{2}+U(r_n)=\frac{Ze^2}{2R^3}r_n^2+U(r_n)=-\frac{3Ze^2}{2R}+\frac{Ze^2}{R^3}r_n^2=const+n\hbar\left(\frac{Ze^2}{m_\tau R^3}\right)^{1/2}$$

Для энергии гамма-кванта верно

$$E_\gamma=E_n-E_{n-1}=\hbar\left(\frac{Ze^2}{m_\tau R^3}\right)^{1/2}$$

Отсюда получается выражение для R как в точном, квантово-механическом, решении.

Критерии оценивания:

1. Есть выражение для потенциала – **4 балла**

1а) Если есть выражение для потенциала, совпадающее с верным с точностью до численного коэффициента (забыли двойку или т.п.) то за пункт дается 2 балла.

2. Записана частота осциллятора

$$\omega=\sqrt{k/m_\tau},\text{ где } U(r)=const+kr^2/2\quad–\textbf{3 балла}$$

3. Записана формула энергии трехмерного гармонического осциллятора – **7 баллов**

3а) Если указанно, что это задача на квантово-механический гармонический осциллятор, или записано соответствующее уравнение Шредингера (без решения), то за пункт дается 2 балла.

4. В том или ином виде указывается, что $E_\gamma = E_2 - E_1$ – **2 балла** (*Примечание: баллы даются только в рамках решения, где* E_n *– уровни энергии гармонического осциллятора*)

5. Записана окончательная формула для *R* – **2 балла**

5а) Если есть формула для *R* совпадающая с правильной с точностью до численного коэффициента, то за пункт дается 1 балл.

6. Получен численный ответ, отличающийся от точного не более, чем на 20 %. – **2 балла**

Разбалловка альтернативного решения задачи 5 основанное на теории Бора

1. Получено выражение для радиуса боровской орбиты r_n лептона в ядре – **8 баллов.**

1а) За формулу для r_n отличающуюся от точной лишь на численный коэффициент дается 7 баллов

1б) Если конечная формула для r_n не выведена, но имеется часть или все необходимые посылки, то: дается 3 балла за наличие формулы $m_\tau \upsilon r_n = n\hbar$ (но не при выводе формулы для водородоподобного атома – типичной ошибки), и 2 балла за наличие формулы для напряженности поля внутри ядра $\mathbf{E} = (Ze/R^3)\mathbf{r}$

2. Записано правильное выражение для полной энергии лептона – **5 баллов**

3. В том или ином виде указывается, что $E_\gamma = E_2 - E_1$ – **2 балла** (*Примечание: баллы даются только в рамках указанного квазиклассического решения*)

4. Записана окончательная формула для *R* - **3 балла**

4а) Если есть формула для *R* совпадающая с верной с точностью до численного коэффициента, то за пункт дается 2 балла.

5. Получен численный ответ, отличающийся от точного не более, чем на 20 %. – **2 балла**

ПРИМЕЧАНИЕ.

Решение с использованием формулы энергии атома водорода в которую входит Z_{eff}, вычисляемое как заряд находящийся в пределах боровской орбиты (радиус которой также зависит от Z_{eff}) сводится к квазиклассическому решению в котором пункт с вычислением полной энергии выполнен неверно (фактически, применяется потенциальная энергия точечного заряда, а не заряженного шара). Поэтому это решение принимается, но за вычетом п.2 (5 баллов) и последующих снижений в п.4 и п.5 вызванных возникающим неправильным коэффициентом 1/2 в выражении для энергии.

Итого: 20 баллов