Разбор задач вступительного экзамена на трек «Искусственный интеллект в естественно-научных исследованиях», 2025 г.

ШАД

Задача 1.

Используя теорему Вейерштрасса, доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится и найти её предел, если

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad x_1 = 1, \quad a > 0.$$

Решение. Докажем, что последовательность сходится, показав, что она монотонна и ограничена. Заметим, что все члены последовательности x_n положительны, так как $x_1 > 0$ и $a > 0$. Применим неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом для $n \geq 1$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}.$$

Таким образом, для всех $n \geq 2$ имеем $x_n \geq \sqrt{a}$. Последовательность ограничена снизу. Рассмотрим разность $x_{n+1} - x_n$ для $n \geq 2$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} - x_n\right) = \frac{a - x_n^2}{2x_n}.$$

Поскольку для $n \geq 2$ мы имеем $x_n \geq \sqrt{a}$, следовательно $x_n^2 \geq a \implies a - x_n^2 \leq 0$. Так как $x_n > 0$, получаем $x_{n+1} - x_n \leq 0$. Это означает, что последовательность $\{x_n\}$ является невозрастающей. По теореме Вейерштрасса ограниченная и монотонная последовательность имеет предел.

Обозначая $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ и переходя к пределу в рекуррентном соотношении:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{a}{L}\right).$$

Решим это уравнение относительно L:

$$2L = L + \frac{a}{L} \implies L = \frac{a}{L} \implies L^2 = a.$$

Так как все члены последовательности положительны, то $L = \sqrt{a}$.

Задача 2.

Определить, какая из форм является положительно определённой и привести невырожденное линейное преобразование, приводящее положительно определённую форму к нормальному виду, а другую — к диагональному.

$$f_1(x) = x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2; \quad f_2(x) = x_1^2 + 56x_2^2 + 16x_1x_2.$$

Решение.

Проверим формы на положительную определенность с помощью критерия Сильвестра.

- Рассмотрим $f_1(x) = x_1^2 + 10x_1x_2 + 26x_2^2$

  Матрица $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix}$

  $\Delta_1 = 1 > 0$

  $\Delta_2 = 26 - 5 \cdot 5 = 25 - 25 = 1 > 0$

  Оба главных минора положительны, значит форма f_1 является положительно определенной.

- Рассмотрим $f_2(x) = x_1^2 + 16x_1x_2 + 56x_2^2$

  Матрица $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 56 \end{pmatrix}$

  $\Delta_1 = 1 > 0$

  $\Delta_2 = 56 - 8 \cdot 8 = 56 - 64 = -8 < 0$

  Второй главный минор отрицателен, значит форма f_2 не является положительно определенной.

Теперь найдем соответствующее преобразование.

1. Выделим полный квадрат:

   $f_1(x) = (x_1^2 + 10x_1x_2 + 25x_2^2) + 26x_2^2 - 25x_2^2 = (x_1 + 5x_2)^2 + x_2^2$.

   Сделаем замену переменных, чтобы получить нормальный вид $y_1^2 + y_2^2$:

   $$\begin{cases} y_1 = x_1 + 5x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

   Выразим исходные переменные x через новые y:

   $$\begin{cases} x_1 = y_1 - 5y_2 \\ x_2 = y_2 \end{cases}$$

2. Применим найденное преобразования к форме f_2:

   $$\begin{aligned} f_2(y) &= (y_1 - 5y_2)^2 + 16(y_1 - 5y_2)y_2 + 56y_2^2 \\ &= (y_1^2 - 10y_1y_2 + 25y_2^2) + (16y_1y_2 - 80y_2^2) + 56y_2^2 \\ &= y_1^2 + 6y_1y_2 + y_2^2. \end{aligned}$$

   Матрица этой новой формы $f_2(y)$ равна $A_2' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Найдем ортогональное преобразование $y = Qz$ которое диагонализует A_2'. Такое преобразование не изменит нормальный вид формы $f_1(y)$ так как $f_1(z) = z_1^2 + z_2^2$. Найдем собственные значения и векторы матрицы A_2':

   $$\det(A_2' - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 9 = 0 \implies 1 - \lambda = \pm 3$$

   Для $\lambda_1 = 4$: $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} v = 0 \implies v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Для $\lambda_2 = -2$: $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} v = 0 \implies v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Матрица ортогонального преобразования: $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   приводит $f_2(y)$ к диагональному виду $f_2(z) = 4z_1^2 - 2z_2^2$.

4. Итоговое преобразование от x к z является композицией двух найденных преобразований:

   $$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

   Или в альтернативной записи:

   $$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + 6x_2) \\ z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + 4x_2) \end{cases}$$

Задача 3.

Палочку длины l разламывают на две части случайным образом. Потом более длинную часть снова разламывают на две случайным образом. Какова вероятность того, что из трех частей можно собрать треугольник?

Решение.
Рассмотрим точку первого разлома — случайная величина X, которая распределена на $[0, l]$. После первого разлома образуются две палочки размера X и $l - X$. Пусть $Y = \max(X, l - X)$ — случайная величина, соответствующая длинной палочке. Точка её разлома — случайная величина Z, которая распределена на $[0, Y]$. После второго разлома дополнительно образуются две палочки Z и $Y - Z$ взамен длинной. Таким образом, у нас три палочки $l - Y$, Z и $Y - Z$, из которых можно сложить треугольник при выполнении условия, что каждая палочка длиннее суммы длин двух других:

1. $l - Y < Z + Y - Z \implies Y > \frac{l}{2}$,
2. $Z < l - Y + Y - Z \implies Z < \frac{l}{2}$,
3. $Y - Z < l - Y + Z \implies Z > Y - \frac{l}{2}$.

Рассмотрим случай $Y = y$ (где $y > \frac{l}{2}$), тогда Z должна быть в интервале $(y - \frac{l}{2}, \frac{l}{2})$. Вероятность такого события:

$$\mathbf{P}(\text{треугольник} \mid Y = y) = \frac{\frac{l}{2} - (y - \frac{l}{2})}{y} = \frac{l - y}{y}.$$

Чтобы найти полную вероятность составления треугольника, нужно проинтегрировать по всем возможным значениям y:

$$\mathbf{P}(\text{треугольник}) = \int_{l/2}^{l} \mathbf{P}(\text{треугольник} \mid Y = y) f_Y(y)\, dy,$$

где $f_Y(y) = \frac{2}{l}$ (так как Y равномерно распределена на $[l/2, l]$). Тогда

$$\mathbf{P}(\text{треугольник}) = \int_{l/2}^{l} \frac{l - y}{y} \cdot \frac{2}{l}\, dy = \frac{2}{l} \int_{l/2}^{l} \left(\frac{l}{y} - 1\right) dy = \frac{2}{l} \left[l \ln y - y\right] \Big|_{l/2}^{l}$$

$$= \frac{2}{l} \left((l \ln l - l) - (l \ln(l/2) - l/2)\right) = \frac{2}{l} \left(l \ln 2 - \frac{l}{2}\right) = 2 \ln 2 - 1.$$

Таким образом, вероятность составления треугольника при таких действиях составляет $2 \ln 2 - 1$.