РАЗБОР ЭКЗАМЕНА 2024

A. Линейность

Рассмотрим линейное пространство многочленов степени не выше 3 над полем $\mathbb{R}$. На нём задано отображение f :

$$f(g(x)) = \text{ НОД } \big(x^2 - 1, g(x)\big) + g'(x),$$

где НОД $\big(x^2 - 1, g(x)\big)$ — многочлен наивысшей степени, являющийся одновременно делителем и $x^2 - 1$, и $g(x)$, у которого старший коэффициент совпадает со старшим коэффициентом $g(x)$. Дополнительно доопределим НОД $\big(x^2 - 1, 0\big) = 0$.
Пример: НОД $\big(x^2 - 1, 2\big) = 2$
Является ли данное отображение линейным?

Ответ: Нет, не является

Решение

- Как известно, взятие производной является линейным отображением на рассматриваемом пространстве многочленов: $(\alpha g(x) + \beta h(x))' = \alpha g'(x) + \beta h'(x)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и любых многочленов g и h. Так как сумма и разность линейных отображений это тоже линейное отображение, f будет линейным, только если отображение НОД$(x^2 - 1, g(x))$ линейно.
- Для того, чтобы НОД$(x^2 - 1, g(x))$ было линейным, нужно убедиться, что выполнены два свойства:
  - НОД$(x^2 - 1, \alpha g(x)) = \alpha$НОД$(x^2 - 1, g(x))$ для $\alpha \in \mathbb{R}$,
  - НОД$(x^2 - 1, g(x) + h(x)) =$ НОД$(x^2 - 1, g(x)) +$ НОД$(x^2 - 1, h(x))$ для любых многочленов g и h.
- С первым свойством проблем нет, а вот со вторым — есть.
- Например, НОД$(x^2 - 1, x^2) = 1$ и НОД$(x^2 - 1, x^2 - 2) = 1$, но при этом НОД$(x^2 - 1, x^2 + x^2 - 2) =$ НОД$(x^2 - 1, 2(x^2 - 1)) = 2(x^2 - 1) \neq 1 + 1 = 2$.
- Таким образом, НОД$(x^2 - 1, g(x))$ не линейное, а значит и f не линейное.

B. Читеры

Честные и принципиальные абитуриенты никогда не списывают чужие решения. Но иногда, в группе из k друзей, где все друг друга попарно знают, образуется сговор.
Доля задач, которые может решить группа зависит от её размера, но и антиплагиат не дремлет и ловит группу из k читеров с вероятностью:

$$\mathbb{P}(C = k) = \frac{k^2}{100} I(0 \leq k \leq 10) + I(k > 10),$$

где I - индикаторная функция.
Доля решённых задач группой из k ребят распределён равномерно на отрезке

$$\left[\frac{\min(k, 5)}{8}, 1\right]$$

Найдите оптимальный размер группы читеров. Это аргмаксимум задачи максимизации разности матожидания доли решённых задач и вероятности для группы быть пойманной.

Ответ: 3

Решение

- Для начала разберемся, что нам нужно максимизировать:

    - Доля решенных задач для группы размера k имеет равномерное распределение на $\left[\frac{\min(k,5)}{8}, 1\right]$, его матожидание это полусумма краев интервала, то есть $\frac{1}{2}\left(\frac{\min(k,5)}{8}+1\right)$.

    - Вероятность быть пойманными равна $\frac{k^2}{100}I(0 \le k \le 10) + I(k > 10)$, что можно короче записать как $\frac{\min(k,10)^2}{100}$.

- Разность того и другого это
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\min(k,5)}{8}+1\right) - \frac{\min(k,10)^2}{100}.$$

- Заметим, что при $k > 5$ доля задач не меняется, а вот вероятность быть пойманными сначала увеличивается, а потом становится равной 1 и перестает меняться. Это значит, что максимум достигается при $k \le 5$. Перебирая значения 1, 2, 3, 4, 5, убеждаемся, что максимум достигается при $k = 3$.

C. Эквивалентно

Найдите 3 константы $m, n \in \mathbb{Z}, C \in \mathbb{R}$, такие что:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\int_0^1 \sin(tx)\ln(x)dx}{Ct^n(\ln(t))^m} = 1$$

Ответ: $1, -1, -1$

Решение

- В этой задаче нас фактически просят понять асимптотику интеграла $\int_0^1 \sin(tx)\ln(x)dx$ при $t \to +\infty$. Вначале убедимся, что при всех t интеграл сходится: в самом деле, $\sin(tx)$ по модулю не больше 1, а $\int_0^1 \ln(x)dx$ сходится (и равен -1, что, впрочем, не важно).

- Попробуем теперь перейти к интегралу в духе $\int_0^1 \sin(tx)\ln(tx)d(tx)$, чтобы потом сделать замену переменной $tx \to x$. Это можно сделать так:
$$\int_0^1 \sin(tx)\ln(x)dx = \int_0^1 \sin(tx)\ln(x)\frac{1}{t}d(tx) = \frac{1}{t}\int_0^1 \sin(tx)\ln(tx/t)d(tx) =$$
$$= \frac{1}{t}\int_0^1 \sin(tx)(\ln(tx)-\ln(t))d(tx) = \frac{1}{t}\int_0^1 \sin(tx)\ln(tx)d(tx) - \frac{\ln(t)}{t}\int_0^1 \sin(tx)d(tx).$$

- Выполняя замену переменной и пересчитывая пределы интегрирования, получаем
$$\frac{1}{t}\int_0^t \sin(x)\ln(x)dx - \frac{\ln(t)}{t}\int_0^t \sin(x)dx = \frac{1}{t}\int_0^t \sin(x)\ln(x)dx - \frac{\ln(t)}{t} + \frac{1}{t}\ln(t)\cos(t),$$
где в последнем равенстве мы просто проинтегрировали $\int_0^t \sin(x)dx = 1-\cos(t)$.

- Заметим, что слагаемое $\frac{1}{t}\ln(t)\cos(t)$ очень похоже на одно из слагаемых, которые будут получаться, если мы интеграл $\frac{1}{t}\int_0^t \sin(x)\ln(x)dx$ попробуем взять по частям:
$$\frac{1}{t}\int_0^t \sin(x)\ln(x)dx = -\frac{1}{t}\int_0^t \ln(x)d\cos(x) = -\frac{1}{t}\left(\ln(x)\cos(x)\Big|_0^t - \int_0^t \cos(x)d\ln(x)\right) =$$

$$= -\frac{1}{t}\left(\ln(t)\cos(t) - \ln(0)\cos(0) - \int_0^t \frac{\cos(x)}{x}dx\right).$$

- Единственная проблема, что $\ln(0) = -\infty$ и $\int_0^t \frac{\cos(x)}{x}dx$ расходится. Чтобы обойти эту проблему, давайте разобьем интеграл $\frac{1}{t}\int_0^t \sin(x)\ln(x)dx$ на две части:

$$\frac{1}{t}\int_0^t \sin(x)\ln(x)dx = \frac{1}{t}\int_0^1 \sin(x)\cos(x)dx + \frac{1}{t}\int_1^t \sin(x)\ln(x)dx.$$

- В последнем выражении первый интеграл это некоторая константа (назовем ее C_1), а вот второй интеграл можно взять по частям в точности как раньше, только теперь нижний предел будет не 0, а 1:

$$\frac{1}{t}\int_1^t \sin(x)\ln(x)dx = -\frac{1}{t}\left(\ln(t)\cos(t) - \ln(1)\cos(1) - \int_1^t \frac{\cos(x)}{x}dx\right).$$

- Теперь все замечательно: $\ln(1) = 0$, а $C_2(t) := \int_1^t \frac{\cos(x)}{x}dx$, во-первых, конечен, а во-вторых, при $t \to +\infty$ стремится к константе $C_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x}dx$. То, что такой интеграл сходится, можно проверить разными способами.

- Например, можно еще раз проинтегрировать по частям:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x}dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}d\sin(x) = \frac{\sin(x)}{x}\bigg|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \sin(x)d\frac{1}{x} = \frac{\sin(x)}{x}\bigg|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}dx.$$

  В последнем выражении первое слагаемое это константа, а интеграл уже сходится: $\sin(x)$ ограничен, а $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ конечен.

- Подводя итог, получаем, что

$$\frac{1}{t}\int_0^t \sin(x)\ln(x)dx = \frac{1}{t}\int_0^1 \sin(x)\cos(x)dx + \frac{1}{t}\int_1^t \sin(x)\ln(x)dx = \frac{C_1}{t} - \frac{1}{t}\ln(t)\cos(t) + \frac{C_2(t)}{t}.$$

- Наконец, мы можем собрать все вместе и получить окончательный результат:

$$\int_0^1 \sin(tx)\ln(x)dx = \frac{1}{t}\int_0^t \sin(x)\ln(x)dx - \frac{\ln(t)}{t} + \frac{1}{t}\ln(t)\cos(t) =$$

$$= \frac{C_1}{t} - \frac{1}{t}\ln(t)\cos(t) + \frac{C_2(t)}{t} - \frac{\ln(t)}{t} + \frac{1}{t}\ln(t)\cos(t) = \frac{C_1}{t} + \frac{C_2(t)}{t} - \frac{\ln(t)}{t} \sim -\frac{\ln(t)}{t}.$$

РАЗБОР ЭКЗАМЕНА 2024

D. Координаты в квадрате

Мальчик Влад от скуки любит рисовать на клетчатой бумаге. Однажды он нарисовал квадрат $n \times n$, границы которого проходят по сторонам клеток. Далее он ввел систему координат внутри квадрата: левый нижний квадратик 1×1 получил координаты $(1, 1)$, а правый верхний - (n, n). Первая координата соответствует смещению по горизонтальной оси, а вторая — по вертикальной. Затем он нарисовал квадрат $(n-1)\times(n-1)$ также по сторонам клеток, не выходя за пределы исходного квадрата. Затем он нарисовал квадрат $(n-2)\times(n-2)$ по сторонам клеток, не выходя за пределы предыдущего квадрата, и так далее. В конце он нарисовал квадрат 1×1, и оказалось, что он совпадает с клеткой исходного квадрата с координатами (x, y).
Когда это увидела мама мальчика, она заинтересовалась вопросом: а сколько существует различных последовательностей квадратов, удовлетворяющих вышеописанным свойствам?

Ответ: $C_{n-1}^{x-1}C_{n-1}^{y-1}$

Решение

- Поместить квадрат размера $(k-1)\times(k-1)$ внутри квадрата $k \times k$ можно четырьмя способами: отрезав самый левый или самый правый столбец и отрезав самую верхнюю или самую нижнюю строку. Заметим, что при этом последовательность квадратов однозначно восстанавливается по последовательности пар вида (лево/право, верх/низ). В этой последовательности $n-1$ пара, и чтобы определить положение финального квадратика, можно посчитать, к примеру, сколько раз мы отрезали левый столбец и сколько раз мы отрезали нижнюю строку. Так, если мы отрезали $x-1$ левый столбец и $y-1$ нижнюю строку, то квадратик будет иметь координаты (x, y).

- Ясно, что количество способов отрезать $x-1$ левый столбец из $n-1$ отрезаний столбцов равно C_{n-1}^{x-1}, и, аналогично, количество способов отрезать $y-1$ нижнюю строку равно C_{n-1}^{y-1}. Так как отрезания столбцов и строк друг от друга не зависят: каждые две конкретные последовательности отрезаний тех и других задают уникальную последовательность вложенных квадратов, то общее число способов оказаться в (x, y) равно $C_{n-1}^{x-1}C_{n-1}^{y-1}$.

E. Давай поиграем

Рассмотрим случайный многомерный нормальный вектор Ψ в $\mathbb{R}^n$ с нулевым средним и единичной матрицей дисперсии. Артём и Лёша играют в игру с нулевой суммой (число очков у одного игрока всегда равно минус числу очков у другого). Каждый игрок зафиксировал до начала игры по одному вектору а (Артём) и l (Лёша) в $\mathbb{R}^n$. В начале игры у каждого 0 очков.
Лёша получает очко в раунде k, если

$$\operatorname{sign}\langle\psi_k, a\rangle \operatorname{sign}\langle\psi_k, l\rangle > 0,$$

а Артём, если меньше, иначе просто происходит переход к следующему раунду. Здесь

$$\operatorname{sign} x := \begin{cases} -1 & \text{if } x < 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

и $\langle\bullet, \bullet\rangle$ - стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ - реализации случайного вектора Ψ, полученные независимо друг от друга. В каждом раунде k рассмотрим число очков у Артёма, делённое на k. К чему оно стремится при $k \to \infty$?

Требуется решить в общем виде.

Ответ: $1 - \frac{2}{\pi} \arccos \frac{\langle a,l \rangle}{|a| \cdot |l|}$

Решение

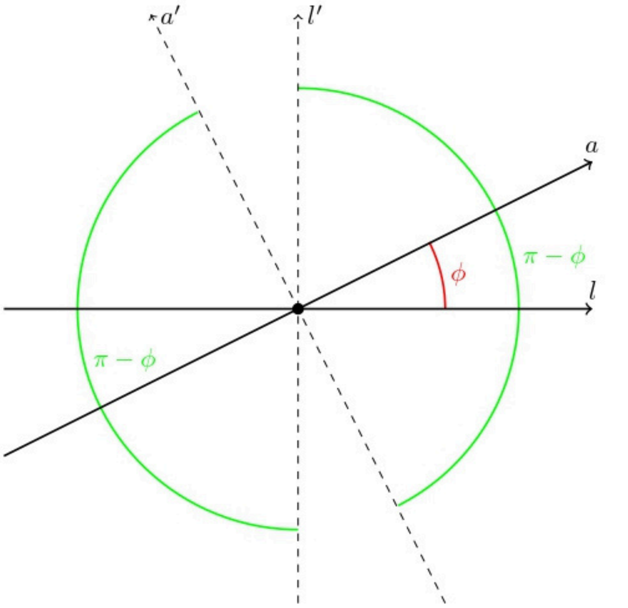
- Основной шаг решения этой задачи — заметить, что нам достаточно перейти в двумерную плоскость, в которой лежат вектора a и l, и рассмотреть плоскую картинку. Разберемся, почему так.

- Пусть $\mathcal{L}$ это указанная двумерная плоскость. Для любого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим его ортогональную проекцию v_1 на $\mathcal{L}$. Так как проекция ортогональная, то вектор $v - v_1$ перпендикулярен $\mathcal{L}$, и в частности перпендикулярен векторам a и l: $\langle a, v - v_1 \rangle = \langle l, v - v_1 \rangle = 0$. По свойствам скалярного произведения получаем:
$$\langle a, v \rangle = \langle a, v_1 \rangle, \quad \langle l, v \rangle = \langle l, v_1 \rangle.$$
Получается, что для определения результата игры достаточно вместо вектора $v \in \mathbb{R}^n$ рассматривать его проекцию v_1.

- Следующим шагом заметим, что по свойствам многомерного нормального распределения проекция нормального случайного вектора на плоскость также будет нормальным вектором меньшей размерности, и так как в нашем случае матрица дисперсий единична, то и у проекции матрица дисперсии тоже будет единична (но уже размера 2×2, а не $n \times n$).

- Выигрыш определяется в зависимости от значения выражения $\operatorname{sign} \langle \psi_k, a \rangle \operatorname{sign} \langle \psi_k, l \rangle$, которое зависит только от знаков скалярных произведений. Это значит, что нам достаточно смотреть на углы между векторами, а их длины ни на что не влияют. В нашей задаче это позволяет сильно упростить дело, потому что угол двумерного нормального вектора распределен равномерно.

- В условии задачи требуется найти предел отношения количества очков Артёма к количеству раундов. Так как за победу Артём получает 1 очко, а за проигрыш — теряет, то искомое отношение стремится к разности вероятностей выигрыша и проигрыша. Артём выигрывает, если скалярные произведения вектора ψ_k на векторы l и a будут одного знака.



- Рассмотрим секторы, в которых косинус угла, а значит и скалярное произведение между векторами ψ_k и l, ψ_k и a будут одновременно положительными или одновременно отрицательными (отмечены зелёным на рисунке). Эти секторы имеют угловой размер $\pi - \phi$, где ϕ — это угол между a и l.

- Так как угол Ψ распределен равномерно, то вероятность, что Артём выиграет равна $p = \frac{2(\pi-\phi)}{2\pi} = 1 - \frac{\phi}{\pi} =$

$1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\langle a,l \rangle}{|a| \cdot |l|}$. Окончательный ответ: $p - (1-p) = 2p - 1 = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \frac{\langle a,l \rangle}{|a| \cdot |l|}$.

F. Алгебраично

Пусть заданы матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times r}, B \in \mathbb{R}^{m \times r}, C \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Для A и B выполнены следующие свойства: $A^T A = I$ и $B^T B = I$. Среди матриц $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$, таких что $\operatorname{Im}(X) \subset \operatorname{Im}(A), \operatorname{Im}\left(X^T\right) \subset \operatorname{Im}(B), \sum_{i,j} X_{ij}^2 = 1$, найдите такую, что $\sum_{i,j} X_{ij} C_{ij}$ максимально.

Ответ: $\frac{AA^T CBB^T}{|A^T CB|_F}$

Решение

- В этом задании нам понадобятся свойства *следа матрицы* $\operatorname{tr}(A)$, который равен сумме диагональных чисел квадратной матрицы A:

  — $\operatorname{tr}(AB^{\mathrm{T}}) = \operatorname{tr}(B^{\mathrm{T}} A) = \sum_{i,j} A_{i,j} B_{i,j}$, где матрицы A и B не обязательно квадратные, главное, чтобы они имели одинаковую форму. Операция $\langle A, B \rangle = \sum_{i,j} A_{i,j} B_{i,j}$ задает скалярное произведение на пространстве матриц одинаковой формы.

  — $\operatorname{tr}(AA^{\mathrm{T}}) = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}} A) = \sum_{i,j} A_{i,j}^2$, где A любая матрица. Корень из суммы квадратов элементов матрицы $\sqrt{\sum_{i,j} A_{i,j}^2}$ называется ее *Фробениусовой нормой* и обозначается как $|A|_F$.

- В этих терминах условие задачи записывается так: необходимо максимизировать по X выражение $\langle X, C \rangle$, где $|X|_F = \sqrt{\langle X, X \rangle} = 1$, $\operatorname{Im}(X) \subset \operatorname{Im}(A)$, $\operatorname{Im}(X^{\mathrm{T}}) \subset \operatorname{Im}(B)$.

- Если бы не было последних двух условий, то задача решалась бы просто: как известно, скалярное произведение двух векторов (в этой задаче мы работаем с матрицами, но их все равно можно рассматривать как вектора, то есть как *элементы векторного пространства*, которым пространство матриц $\mathbb{R}^{n \times m}$ конечно же является) максимально, когда они сонаправлены. В этом случае оптимальный X это $C/|C|_F$.

- Разберемся с последними двумя ограничениями. Если $\operatorname{Im}(X) \subset \operatorname{Im}(A)$, то это значит, что любая линейная комбинация столбцов $X\beta$ матрицы X (в частности, сами столбцы по отдельности) является линейной комбинацией столбцов A. Тогда сама матрица X представима в виде AR_1, где R_1 некоторая матрица (вообще говоря, не единственная). Причем для любой матрицы R_1 матрица AR_1 будет обладать нужным свойством. Аналогично, условие $\operatorname{Im}(X^{\mathrm{T}}) \subset \operatorname{Im}(B)$ означает, что $X^{\mathrm{T}} = BR_2$, или иначе $X = R_2^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}}$.

- Собирая оба ограничения вместе, получаем, что все матрицы X, для которых $\operatorname{Im}(X) \subset \operatorname{Im}(A)$ и $\operatorname{Im}(X^{\mathrm{T}}) \subset \operatorname{Im}(B)$ имеют вид AYB^{T}, где Y это любая матрица размера $r \times r$.

- Посмотрим, при каких Y матрица AYB^{T} будет удовлетворять ограничению $|AYB^{\mathrm{T}}|_F = 1$:

  $$|AYB^{\mathrm{T}}|_F^2 = \operatorname{tr}(AYB^{\mathrm{T}}BY^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}) = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}}AYB^{\mathrm{T}}BY^{\mathrm{T}}) = \operatorname{tr}(YY^{\mathrm{T}}) = |Y|_F^2,$$

  где первое равенство это второе свойство про след матрицы, второе равенство это первое свойство про след для матриц $A := AYB^{\mathrm{T}}BY^{\mathrm{T}}$, $B := A$, а третье равенство это условия $A^{\mathrm{T}}A = I$ и $B^{\mathrm{T}}B = I$.

- Теперь разберемся, что нам нужно максимизировать:

  $$\langle X, C \rangle = \operatorname{tr}(XC^{\mathrm{T}}) = \operatorname{tr}(AYB^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}) = \operatorname{tr}(YB^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}A) = \langle Y, A^{\mathrm{T}}CB \rangle,$$

  где $|Y|_F = 1$.

- Такую задачу мы уже умеем решать (см. 3 пункт): оптимальный Y это $A^{\mathrm{T}}CB/|A^{\mathrm{T}}CB|_F$.

- Окончательный ответ: $X = AA^{\mathrm{T}}CBB^{\mathrm{T}}/|A^{\mathrm{T}}CB|_F$.